Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

TRANSITIONS DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Compte-rendu du Projet Spécial n°3

Fabrice VANDEBROUCK[*] – Claudia CORRIVEAU[**] – Ouahiba CHERIKH[***]

Pendant le colloque EMF2015, le projet spécial n°3 portant sur les transitions dans l'enseignement des mathématiques, a disposé de trois plages de travail d'une durée d'une heure et demie à deux heures. Le travail lors des trois séances s'est réparti entre des présentations et des discussions sur la base de textes soumis. Les présentations ont plus particulièrement porté sur deux thèmes : celui de la compréhension des phénomènes de transition et celui de la remédiation des problèmes de transition. Les présentations faites dans le cadre de ce projet spécial ont été diversités en termes de transition investiguée (de l'école élémentaire à l'école secondaire ou encore de l'école secondaire à l'enseignement supérieur) et en termes d'objets étudiés.

Le projet spécial s'est conclu avec une table ronde dans laquelle des intervenants ont présenté ou bien des dispositifs mis en place pour pallier les difficultés de transition du primaire au secondaire et du lycée à l'université dans leur pays respectif, ou bien des difficultés vécues par les élèves, étudiants et enseignants en lien avec les transitions.

Les participants

Nous remercions chaleureusement les nombreux participants, professeurs et professeures de mathématiques, didacticiens et didacticiennes, étudiants et étudiantes, inspecteurs des écoles, etc., pour les échanges riches. Ils étaient une trentaine lors des deux premières séances et une quinzaine lors de la troisième et dernière séance.

I. LES CONTRIBUTIONS

Pour aborder les transitions dans l'enseignement des mathématiques, les présentateurs ont choisi des objets distincts et des angles variés. Comme nous l'avons déjà mentionné, certains proposent une meilleure compréhension des phénomènes de transitions et d'autres s'engagent dans des remédiations possibles pour pallier les difficultés d'élèves liées à ces transitions.

[*] Université Paris Diderot – France – vandebro@univ-paris-diderot.fr
[**] Université Laval – Canada – claudia.corriveau@fse.ulaval.ca
[***] USTHB – Algerie – ouahiba_cherikh@yahoo.fr

Vandebrouck F., Corriveau C., Cherikh O. (2015) Transitions dans l'enseignement des mathématiques - *Compte-rendu du Projet Spécial n°3*. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – Spé3, pp. 963-969.

1. Compréhension du phénomène de transition

Timbila Sawadogo dégage, d'une analyse des programmes du secondaire et du supérieur au Burkina Faso, une différence de structuration tant dans le fond (dans les contenus privilégiés à enseigner), que dans la forme (à travers une méthodologie d'enseignement plus ou moins explicite dans les programmes) dans le passage du secondaire à l'université. Sawadogo résume les exigences en termes de démonstration et de formalisation du secondaire à la maitrise de la pensée déductive sur de courtes séquences. De plus, il note un engagement prudent dans l'utilisation des symboles des quantificateurs existentiel et universel. Quant à l'université, les exigences en termes de démonstration et de formalisation sont très peu explicitées dans les programmes, de sorte que les enseignants ont une grande marge de manœuvre par rapport à ce qu'ils peuvent faire.

Par sa présentation, Isabelle Demonty a mis en évidence que plusieurs recherches en didactique des mathématiques, qui ne portent pas spécifiquement sur les questions de transition interordres, peuvent tout de même présenter des résultats éclairants pour les questions de transition. C'est le cas des recherches qui mettent de l'avant d'importants sauts conceptuels à propos de grands domaines mathématiques – par exemple les travaux menés sur le passage des nombres naturels aux nombres rationnels (Brousseau, 1981), de l'arithmétique à l'algèbre (Bednarz et Janvier, 1996) ou encore d'une géométrie empirique à une géométrie déductive (Salin, 2003). Dans le projet de recherche présenté, elle a voulu savoir si et comment les enseignants prenaient en considération ces résultats dans leur enseignement ? Sont-ils intuitivement au fait de ces résultats ? Elle a aussi mis en évidence que la tendance est à regarder la transition sous l'angle de l'ordre d'enseignement supérieur (en termes de difficultés des élèves arrivant au nouvel ordre), mais l'étude qu'elle a menée tend à montrer que les connaissances des sauts conceptuels concernent tout aussi bien les enseignants des ordres inférieurs pour assurer la préparation de leurs élèves.

Aurélie Chesnais, Nicolas GrenieR-Boley et Julie Horoks ont montré, notamment par des analyses de manuels aux différents ordres scolaires, primaire, collège et Lycée en France, le peu d'articulation entre les différents aspects des notions, en particulier au niveau inférieur de la transition où la prise en compte de ce qui est nécessaire pour le niveau suivant semble insuffisante. Par exemple, par leurs analyses autour de la notion de symétrie dans le passage de la CM2 à la 6^e^ ou encore ceux autour de la notion de fonction entre le collège et le Lycée, ils remarquent une grande variabilité entre les manuels, en particulier ceux de la CM2, de la façon de prendre en considération la transition. Le travail mené par ces chercheurs, avec la mise en parallèle de deux transitions, permet d'entrevoir l'intérêt de pousser l'étude de différentes transitions, autour de différents contenus, pour en dégager des spécificités, mais aussi des invariants.

2. Remédiation des problèmes de transition

Selon Claudia Corriveau, les enseignants ont un rôle important à jouer dans la compréhension des questions de transitions, surtout lorsque l'on cherche à réfléchir aux articulations possibles entre deux ordres. Le projet de recherche présenté a été mené en collaboration avec des enseignants des ordres secondaire et postsecondaire, collaboration qui a permis d'une part de mieux comprendre les manières de faire des mathématiques à chacun des ordres, et d'autre part, d'envisager un rapprochement entre les deux ordres. Dans le cadre de la présentation, elle a exposé la reconstitué d'une *trajectoire d'harmonisation* en lien avec le travail sur les fonctions. Elle note trois moments centraux dans cette reconstruction : l'émergence d'éléments clés (par ex. des aspects de l'enseignement/apprentissage des mathématiques considérés importants pour les enseignants des deux ordres), l'établissement de liens concrets et l'élaboration d'activités à mener en classe avec les élèves ou étudiants. Ce travail conjoint permet aux enseignants de réorganiser leurs manières de faire à la lumière de ce qui est fait à l'autre ordre, de problématiser au besoin leurs façons de faire usuelles et de leur accorder un nouveau sens.

Patrick Fretigné et Viviane Durand-Guerrier ont présenté les travaux de la commission inter IREM Université. Cette commission est l'une des 13 commissions nationales du réseau des IREM en France. Les IREM permettent la collaboration des enseignants de différents ordres. En particulier, le travail au sein de la commission Université a permis de dégager des difficultés et des pistes de remédiations à travers la collaboration des enseignants des lycées et des universités sur deux thèmes, celui d'une part de la nature des nombres réels et la structure de leur ensemble, et celui d'autre part de la place de la logique dans les contenus et les pratiques des enseignants des deux ordres – avec un exemple explicite d'articulation possible entre les deux ordres.

II. LA TABLE RONDE

Le thème des transitions interordres est un objet d'intérêt commun pour différents acteurs du monde de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques. Il a fait l'objet de nombreuses recherches en didactique des mathématiques ; il interpelle les enseignants qui préparent leurs élèves à l'autre ordre ou ceux qui les reçoivent; il intéresse aussi les inspecteurs et conseillers pédagogiques qui ont une vue d'ensemble du système scolaire et, le plus souvent, travaillent avec des enseignants de plusieurs ordres scolaires. Ainsi, dans le cadre du projet spécial n°3, nous avons organisé une table ronde sur le thème des transitions dans le but d'une part de favoriser les échanges entre ces différents acteurs, et d'autre part, pour discuter de différents dispositifs mis en place pour aborder les questions de transition interordres ou pour pallier les difficultés liées aux transitions selon divers pays.

La table ronde, animée par Ouahiba Cherikh, a réuni quatre intervenants : Abdelmoumen Zekiri (Université des Sciences et Technologies Houari Boumediene, Algérie), Salah Makaci (inspecteur des écoles, Algérie), Viviane Durand-Guerrier (Université de Montpellier, France) et Claudia Corriveau (Université Laval, Québec).

- Abdelmoumen Zekiri a présenté de manière détaillée la situation vécue par les étudiants dans le passage de l'école secondaire à l'université. Il décrit une rupture quasi-totale entre les deux ordres. Cette transition engendre des difficultés énormes pour les étudiants qui finissent par déserter la filière Licence Mathématiques. Les étudiants arrivent alors à compenser le module de Mathématiques par d'autres modules qui leur apparaissent plus accessibles. Zekiri dénonce aussi le fait de ne pas associer les enseignants de mathématiques lors de l'élaboration de réformes et la rédaction de programmes scolaires. Ces réformes, introduites par les ministères de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur, sont alors imposées aux enseignants qui les subissent sans être préparés ni suffisamment formés.
- Salah Makaci a articulé sa présentation autour de deux idées : les difficultés reliées au passage à l'enseignement moyen en Algérie et les besoins en termes de continuité. Il a présenté les difficultés des élèves repérées par les professeurs de mathématiques de l'enseignement moyen. Ces derniers mentionnent que les bases minimales de l'enseignement primaire sont mal assurées (difficultés avec les opérations de base, que ce soit les tables à connaître ou les calculs à faire par écrit, difficultés à choisir l'opération sollicitée par une situation, ne pas savoir utiliser les instruments géométriques, etc.). De plus, la transition vers l'enseignement moyen s'accompagne,

selon Salah Makaci, du passage de la manipulation aux raisonnements (difficulté à maîtriser le vocabulaire mathématique, à traduire des énoncés par un dessin, à passer du langage mathématique à l'arabe et inversement, à se représenter dans l'espace, etc.). M. Makaci met en évidence l'importance de constituer ce qu'il nomme un « fil rouge » et la nécessité de mettre en place des outils qui favorisent la continuité entre l'enseignement primaire et l'enseignement moyen. Les pistes envisagées sont les suivantes :

- Prendre connaissance des programmes respectifs.
- Préciser, dans un document, le profil de sortie et d'entrée pour chaque niveau.
- Organiser des opérations de formation conjointe primaire/moyen.
- Repenser le système d'évaluation.
- Etc.

- Salah Makaci a aussi présenté la situation de la transition de l'enseignement moyen à l'enseignement secondaire à partir de ce que Bachir Bouchelif, qui n'a malheureusement pas pu participer à la dernière séance, avait préparé. Après avoir relaté les difficultés des élèves et des enseignants, M. Makaci a présenté un programme de liaison impliquant des enseignants du collège (enseignement moyen), du Lycée (enseignement secondaire) et de l'université. La mise en place de cette cellule de réflexion pour les différents programmes a permis de déterminer les points communs et a permis d'élaborer des grilles d'évaluation pour déterminer les acquis et la mise en place d'un système de remédiation avant le passage au cycle supérieur

- Après avoir présenté les particularités du système scolaire québécois, Claudia Corriveau a fait état d'une part des initiatives du Ministère de l'Éducation, de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche (MEESR) du Québec en lien avec les transitions interordres et, d'autre part, a présenté quelques initiatives locales. Elle relève deux initiatives importantes du MEESR dans l'enseignement des mathématiques : 1) le développement d'un document qui s'intitule « Progression des apprentissages » (MELS, 2009) dans lequel tous les contenus mathématiques du primaire jusqu'au secondaire sont présentés selon leur progression dans le parcours scolaire des élèves avec des indications sur ce que l'élève devrait être capable de faire avec l'aide de l'enseignant, ce qu'il peut faire seul ou ce qu'il devrait pouvoir réinvestir dans le cadre d'autres apprentissages mathématiques. 2) La constitution d'une table interordres dont le mandat est d'élaborer des pistes d'action pour rendre les mathématiques plus accessibles; les valoriser; et en faciliter la continuité dans l'enseignement. Cette table interordres est composée de représentants de différents ordres d'enseignement et de didacticien des mathématiques du Québec. La présentation des initiatives locales a permis de mettre en lumière que les questions de transition interordres préoccupent les enseignants qui ressentent le besoin d'organiser des lieux de rencontres entre les différents ordres d'enseignement.

Viviane Durand-Guerrier a présenté des éléments de réflexion à propos des transitions à partir du contexte de la France. Elle met de l'avant l'importance d'une circulation des professeurs entre le collège et le lycée. Ils ont la même formation, mais ils sont dans des établissements différents (elle mentionne par ailleurs que cela n'a pas toujours été le cas). Ce cloisonnement rend les questions de transition un peu plus complexes. L'idée est donc de développer un dispositif de collaboration qui permettrait aux enseignants des différents ordres d'être en contact.

Dans le domaine de l'enseignement des mathématiques, les initiatives nationales sont souvent mises en œuvre à travers les groupes IREM et les différentes académies. Au niveau de la transition lycée université, Viviane Durand-Guerrier décrit des initiatives locales qui se retrouvent dans un certain nombre d'académies sous forme de groupes liaison lycée-université où chacun y participe avec sa propre expertise. Ces groupes sont constitués des enseignants du secondaire, des enseignants universitaires, des didacticiens de mathématiques (menant des recherches soit au secondaire, soit à l'université ou encore sur les questions de transitions interordres) et des inspecteurs. L'intervention de ces différents acteurs permet d'avoir une vision assez globale et assez générale de la situation. Les travaux de ces différents groupes ont permis de conclure entre autres qu'il est nécessaire de coordonner les connaissances et les expériences de chacun pour aboutir à des solutions : la connaissance des programmes du lycée ne suffit pas à l'enseignant du postsecondaire pour avoir une idée de la réalité du terrain. Ce sera plutôt l'enseignant du secondaire qui pourra lui relater la réalité du secondaire. Leur mise en dialogue apparaît essentielle. De plus, Viviane Durand-Guerrier mentionne que la transition peut être pensée en termes de rupture, mais aussi en matière de continuité.

En France des changements de programme sont en cours, le primaire est composé actuellement de trois cycles, une perspective institutionnelle de transition est d'introduire un quatrième cycle à cheval entre l'école primaire et le collège.

III. CONCLUSION

Les discussions qui ont suivi les présentations et qui se sont prolongées pendant la synthèse du projet spécial ont ouvert sur un ensemble de questions d'intérêt pour aborder la problématique des transitions interordres. Nous avons pu repérer, à travers ces discussions, des interrogations pouvant se regrouper en deux thèmes.

Un premier thème qui a soulevé un questionnement concerne **la formation des enseignants et les questions de transition**.

- À travers les présentations et les discussions qui en ont découlé, nous nous sommes demandé dans quelle mesure les enseignants étaient renseignés des résultats de recherche susceptibles d'éclairer des difficultés liées aux transitions interordres en mathématiques ? Les enseignants des ordres primaire, secondaire, postsecondaire sont-ils au fait, ne serait qu'intuitivement, de ces sauts conceptuels dans le passage du primaire au secondaire (Demonty) ? Des nouvelles exigences en termes de formalisme dans le passage à l'université (Sawadogo) ? Des répercussions à ne travailler que très peu la logique au secondaire ou des conceptions du nombre qu'ont les étudiants à leur arrivée à l'université (Fretigné et Durand Guerrier) ? Comment les aborder avec ceux-ci (Fretigné et Durand Guerrier ; Corriveau) ? Que peut-on faire en ce sens du point de la formation ?

- En effet, ce questionnement, initié par Demonty, renvoie notamment aux dispositifs de formation à mettre en place pour aborder les questions de transition interordres avec les enseignants des différents paliers. Plusieurs présentations, particulièrement celle de Corriveau et celle de Fretigné et Durand-Guerrier, ont mis en évidence l'intérêt d'organiser des formations sur le thème des transitions qui permettent à des enseignants de plusieurs ordres de travailler ensemble. Bien que l'idée de décloisonnement amène plusieurs enjeux, notamment celui des rapports asymétriques entre les enseignants de différents ordres, les expériences relatées par les chercheurs se sont avérées instructives pour ceux-ci. En effet, la mise en dialogue apparaît un élément clé pour mieux comprendre les mathématiques qui se font à chaque ordre et comment elles se font de part et d'autre.

- Il a aussi été mis en évidence l'intérêt de travailler sur des thèmes proches des programmes des enseignants des deux ordres. Par exemple, Durand-Guerrier a bien montré comment, à travers des contenus des programmes du secondaire, il est possible de concevoir un enseignement qui satisfait aussi des exigences en logique préalable à l'enseignement supérieur, bien que la logique ne fasse plus explicitement partie des programmes du secondaire. Corriveau a montré que les enseignants du secondaire, en travaillant avec ceux du postsecondaire, ont donné un tout nouveau sens à certaines prescriptions des programmes, plus particulièrement ce qui relève de la composition de fonctions et des opérations sur les fonctions. Ainsi, lorsque des difficultés liées aux transitions sont soulevées par des chercheurs, il n'est pas toujours nécessaire d'en conclure qu'il faut réintroduire tel ou tel contenu dans les programmes. Durand-Guerrier et Corriveau ont montré comment partir du « territoire » de secondaire, il est possible de l'enrichir à partir des résultats de recherche en didactique ou par la collaboration avec des enseignants de l'autre ordre.

- Un lien a été fait entre les difficultés des étudiants dans la transition secondaire-université et les approches d'enseignement privilégiées à l'université. La synthèse a aussi mené à un questionnement à propos de ce qui est attendu comme formation pour enseigner au niveau de l'université. Il a alors été mis en évidence que les attentes des enseignants du supérieur envers les étudiants se formulent en termes d'appropriation conceptuelle des objets mathématiques, or, ces attentes ne sont pas toujours en adéquation avec les moyens pris pour y parvenir. Si la collaboration entre didacticiens et enseignants des ordres primaires et secondaire a permis de mettre en place des approches d'enseignement favorisant la compréhension des élèves, comment se fait-il qu'il soit plus ardu d'intervenir, comme didacticien, auprès des enseignants (mathématiciens) universitaires ? Plusieurs recherches menées en didactique des mathématiques proposent des approches alternatives à la présentation formelle du savoir au niveau de l'université ou mettent de l'avant les difficultés vécues par les étudiants liées aux exigences accrues en termes de formalisme dans le passage à l'université. Pourtant, il semble y avoir une forte résistance dans le milieu de l'enseignement des mathématiques universitaire.

Le deuxième thème à susciter un questionnement traite de **la poursuite de l'investigation des questions de transition sur le plan de la recherche**

- Contraster différentes transitions permet une réflexion théorique et méthodologique sur la façon d'étudier les transitions d'un point de vue didactique. Chesnais, Grenier-Boley, Horoks, Robert ont mis en évidence des invariants et des distinctions entre différents types de transition à partir d'analyse de manuels, mais qu'en serait-il sous l'angle des manières de faire à chaque ordre (Corriveau et Bednarz, 2013), des cultures mathématiques (Artigue, 2004), etc.
- Mettre en lumière la manière de voir les transitions permet une réflexion théorique et méthodologique sur la façon d'étudier les transitions d'un point de vue didactique : sous l'angle des sauts, de ruptures, de vide, de différences, de ressemblances, de continuité, d'une comparaison, d'arrimage, d'harmonisation, d'articulation, etc.
- Dans la discussion synthèse, il a été mis en évidence que les transitions interordres peuvent être abordées à un niveau institutionnel et à un niveau local. La question posée est alors celle du rôle du didacticien dans ces deux contextes distincts. Comment

intervient-il ? En termes de formalisme et de démonstration, en particulier au Burkina Faso, Sawadogo pense que ce serait bien que les didacticiens puissent définir une jonction entre les différents cycles sans forcément changer les programmes.

RÉFÉRENCES

Artigue M. (2004, juillet) Le défi de la transition secondaire/supérieur : Que peuvent nous apporter les recherches didactiques et les innovations développées dans ce domaine. *Communication présentée au 1er Congrès Canada-France des sciences mathématiques, Toulouse*.

Bednarz N., Janvier B. (1996) Algebra as a problem solving tool : Continuities and discontinuities with arithmetic. In Bednarz N., Kieran C., Lee L. (Eds.) *Approches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 115-136).Dordretch : Kluwer.

Brousseau G. (1981) Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques* 2(1), 37-127.

Corriveau C., Bednarz N. (2013). Manières de faire des mathématiques comme enseignants : une perspective ethnométhodologique. *For the Learning of Mathematics* 33(2), 24-30.

MELS (2009) Progression des apprentissages : Mathématiques. *Programme de formation de l'école québécoise*. Québec.

Salin M.-H. (2003) Comprendre les difficultés des élèves à passer de la « géométrie de l'école primaire » à la « géométrie du collège ». In Samida H. (Ed.) *Actes du 2^e^ colloque international Espace Mathématique Francophone* (CD-Rom). Tozeur : Commission Tunisienne pour l'Enseignement des Mathématiques et Association Tunisienne des Sciences Mathématiques.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

CARACTÉRISATION DIDACTIQUE DE L'ÉVOLUTION DES CONTENUS A ENSEIGNER LORS DES TRANSITIONS – DEUX EXEMPLES D'UNE MEME NOTION ABORDEE AVANT ET APRES UNE TRANSITION (SYMETRIE ET FONCTION)

Aurélie CHESNAIS[*]–Nicolas GRENIER-BOLEY[**]–Julie HOROKS[***]–Aline ROBERT[****]

Résumé – Pour comprendre ce qui se joue en mathématiques lors de transitions institutionnelles, nous pensons qu'il est nécessaire de mettre en regard les résultats et difficultés des élèves et les pratiques des enseignants, compte tenu des contenus à enseigner et des contextes scolaires concernés. Mais nous postulons que c'est de la qualité des descriptions (analyses didactiques) de ces contenus que dépend la possibilité d'apprécier suffisamment les pratiques et leurs conséquences sur les activités des élèves. Dans ce travail nous présentons ainsi les éléments d'une caractérisation didactique de l'évolution des contenus à enseigner lors des transitions, en les développant sur deux exemples.

Mots-clefs : transition institutionnelle, analyse didactique, activités des élèves, symétrie axiale, fonction.

Abstract – To understand what is at stake in mathematics during institutional transitions, we believe that it is necessary to compare pupils' results and difficulties with teachers' practices, taking into account the teaching contents and the underlying school contexts. However we assume that the quality of description (didactical analysis) determines the possibility to acknowledge teachers' practices and their consequences on pupils's activities. To this end we present elements of a didactical characterisation of the evolution of teaching contents during transitions and we develop them on two examples.

Keywords: institutional transition, didactical analysis, pupils' activities, reflection symmetry, function

Dans ce travail nous présentons les outils que nous avons construits en vue d'une caractérisation didactique de l'évolution des contenus à enseigner lors des transitions, qui nous paraissent un préalable nécessaire à l'étude plus complète de ce qui se passe notamment dans les classes. Nous donnons en introduction une vue d'ensemble de l'étude à mener, justifiée par notre inscription théorique, puis nous développons l'analyse de l'évolution des contenus sur deux exemples, l'un à la transition école primaire/collège et l'autre à la transition collège/lycée, qui nous permettent de mettre à l'épreuve nos outils sur deux transitions différentes. Il s'agit de revenir à la nature même des notions et à la description de leurs spécificités, pour dégager et différencier ce qui est retenu dans les programmes des deux années concernées, analyser les mises en fonctionnement possibles de ces notions dans les contenus proposés aux élèves en classe, en précisant les niveaux de conceptualisation visés. L'étude des manuels enrichit ces premières analyses, et, dans la

[*] Universités Montpellier 2 et Montpellier 3 (LIRDEF EA 3749) – France – aurelie.chesnais@univ-montp2.fr
[**] Université de Rouen (LDAR EA 4434) – France – nicolas.grenier-boley@univ-rouen.fr
[***] Université Paris Est Créteil (LDAR EA4434) – France – jhoroks@gmail.com
[****] Université de Cergy-Pontoise (LDAR EA 4434) – France – aline.robert@iufm.u-cergy.fr

Chesnais A., Grenier-Boley N., Horoks J., Robert A. (2015) Caractérisation didactique de l'évolution des contenus à enseigner lors des transitions – deux exemples d'une même notion avordée avant et après une transition (symétrie et fonction). In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – Spé3, pp. 970-981.

mesure où leurs contenus peuvent orienter les pratiques des enseignants, elles préparent l'étude de ce qui se passe en classe.

I. INTRODUCTION

De nombreuses recherches soulignent que les moments de transition inter-ordres en mathématiques sont cruciaux à plusieurs égards et qu'ils sont révélateurs de différents types de ruptures. Dans de nombreux cas, c'est la question de l'adaptation des élèves à la nouvelle structure qui est abordée, avec des augmentations ou des accélérations d'échec scolaire pour certains élèves (notamment liées à l'origine sociale mais pas seulement) ainsi que des accélérations de réussite pour certains autres élèves.

Pourquoi ou pour quoi étudier du point de vue didactique une transition inter-ordre particulière ? L'enjeu serait ici pour nous de trouver des pistes pour faciliter le passage des élèves dans les classes supérieures au moment de cette transition, et pour cela, ne pas se limiter à ce qui est attendu au niveau supérieur mais questionner des différences qui peuvent être sources de perturbations pour les élèves, en étudiant les contenus et les logiques de pratiques des enseignants des deux ordres considérés. Dans cette contribution, nous nous intéressons aux transitions école/collège (E/C) et collège/lycée (C/L) en France.

1. *Aspects institutionnels des transitions école/collège et collège/lycée en France*

Dans cette contribution, nous restreignons notre propos au système éducatif français même si les mêmes questions ont du sens dans de nombreux pays. En France, l'enseignement obligatoire est divisé en trois ordres distincts : l'*école élémentaire* (cinq niveaux, élèves de 6 à 11 ans), le *collège* (quatre niveaux, élèves de 12 à 15 ans) puis le *lycée* (trois niveaux, élèves de 15 à 18 ans). Nous considérons seulement la voie *générale* du lycée (et non les voies technique ou professionnelle).

Les deux transitions auxquelles nous nous intéressons sont à la fois des transitions inter-niveaux et inter-ordres, donc définies d'abord par une modification institutionnelle et structurelle : passage du CM2 à la sixième (de l'école primaire au collège), passage de la troisième à la seconde générale (du collège au lycée général). Ces deux transitions n'ont cependant pas les mêmes caractéristiques. D'une part, entre la troisième et la seconde générale, une orientation des élèves se fait après une évaluation nationale dont la préparation peut influencer les contenus travaillés ; ce ne sont pas les élèves les plus en difficulté que l'on retrouve en seconde générale, tandis qu'entre le CM2 et la sixième il y a moins de sélection. D'autre part, si les enseignants de troisième et de seconde ont généralement suivi la même formation initiale – ce sont des professeurs de collège et lycée spécialistes de mathématiques qui ont passé des concours similaires –, ce n'est pas le cas des enseignants de l'école élémentaire et du collège, ceux de l'école élémentaire ayant suivi une formation généraliste et passé des concours différents de ceux du collège. Enfin il y a généralement peu de communication entre les écoles et les collèges.

2. *Un point de vue didactique sur les transitions*

Comprendre ce qui se joue à l'intérieur des classes et penser des alternatives peut passer par une entrée didactique (même si celle-ci ne peut suffire à prendre en charge toutes les difficultés liées aux transitions). Les travaux antérieurs menés sur les questions de transition en mathématiques les abordent en général sous l'angle des difficultés des élèves, ou des comparaisons des contenus enseignés, montrant par exemple les changements conceptuels ou les ruptures (voir par exemple Salin 2003 ou Grugeon 1997). En didactique des mathématiques, le travail de Colomb et al. (1987) est un des rares à tenir compte aussi des enseignants, mais ces auteurs ne s'intéressent qu'aux représentations qu'ont les enseignants des mathématiques et de leur enseignement et mettent en évidence essentiellement des similitudes entre enseignants de CM2 et de sixième. Plus récemment, Bednarz et al. (2009), dans une perspective d'articulation entre les deux ordres d'enseignement (école et collège), pointent eux aussi la nécessité de prendre en considération le point de vue des enseignants.

Nous nous intéressons ici à des notions mathématiques dont l'apprentissage et la conceptualisation[1] sont longs, et qui mettent en jeu des enseignements qui commencent avant une transition inter-ordre (au moins une année) et se poursuivent au-delà. Nous admettons plusieurs hypothèses générales justifiant l'étude :

- cette poursuite de l'enseignement, après la transition, se fait d'une autre manière, et les différences peuvent être mises en relation avec certains échecs ;

les transitions révèlent certains échecs, davantage que les autres passages d'un niveau au suivant ; en particulier les publics défavorisés, fragiles, sont susceptibles de réagir plus négativement encore à des changements qui sont en jeu dans les transitions : changements de rythme, changements d'attentes sur les investissements des élèves, changements liés aux mathématiques à mettre en fonctionnement (implicites ou non) qui sont conséquence de la « différence » entre les enseignants concernés. Ces deux hypothèses s'appuient d'une part sur des constats tirés d'échanges avec les enseignants du niveau supérieur dans la transition, qui s'étonnent des difficultés de certains de leurs élèves et d'autre part sur le fait qu'il y a effectivement de grandes différences dans les exercices proposés entre les deux niveaux d'une transition s'agissant de ce que l'on propose aux élèves ou de ce que les enseignants attendent d'eux (Benzekry et al. 2011). Pour étudier les transitions, le travail du didacticien consiste à caractériser les notions visées à chaque niveau (nature, place dans les programmes, attentes, difficultés), en déduire les évolutions entre les deux niveaux, puis réfléchir aux scénarios possibles et analyser les déroulements en classe, en prenant en compte tout ce qui peut avoir une influence sur les activités des élèves (ce dernier point n'étant pas abordé ici faute d'avancée suffisante dans cette partie de la recherche).

L'évolution des contenus entre deux niveaux peut être analysée suivant plusieurs axes :

- en termes d'objets de savoir à enseigner : les notions visées sont-elles définies et représentées de la même manière ou en tout cas dans une continuité des deux côtés de la transition ? qu'est-ce qui va permettre aux élèves de reconnaître les notions déjà abordées l'année précédente ?
- en termes de tâches : on peut supposer une augmentation dans la complexité des tâches proposées aux élèves (suivant les différentes adaptations demandées, et les initiatives potentiellement laissées aux élèves dans la résolution), mais on peut aussi étudier si les tâches proposées sont plus ou moins nombreuses et variées.
- en termes de niveaux de conceptualisation visés, dégagés à partir de ce qui précède et des programmes, en s'intéressant en particulier aux caractères objets et outils des notions, au travail attendu sur les cadres et registres, au niveau de rigueur attendu (par exemple dans le vocabulaire employé, le statut et la généralité de ce que l'on affirme), et en précisant sur toutes ces dimensions les liens entre ancien et nouveau, tant au niveau des notions que des tâches et des modes de raisonnement, tout ceci participant à

[1] Nous associons à la conceptualisation une certaine disponibilité des connaissances, outils et objets et leur réorganisation dans les acquis antérieurs.

la fois à la complexité des tâches proposées aux élèves, et à la richesse de ce qui leur est proposé pour apprendre.

- en termes de difficultés répertoriées d'élèves de chaque niveau scolaire.

Une analyse des programmes et des manuels des niveaux considérés est menée à cette fin, précédée d'une analyse épistémologique des notions visées dans laquelle on intègre ce qu'on sait des élèves. C'est la partie qui sera illustrée ci-dessous sur deux exemples contrastés.

II. DEUX EXEMPLES D'ETUDE DE CONTENUS

Nous avons choisi de travailler sur des notions communes aux deux niveaux de la transition pour faciliter la comparaison (mais pas communes aux deux transitions, faute de trouver des notions communes aux programmes scolaires des 4 niveaux) : pour la transition CM2/6ème, la symétrie, et pour la transition 3ème/2nde, les fonctions. Ce sont des notions donc la conceptualisation n'est pas simple, comme nous le détaillons ci-dessous, en nous appuyant sur des études de chaque notion d'un point de vue épistémologique et institutionnel.

La notion de **symétrie axiale** fait partie des programmes des deux niveaux, où se négocient les enjeux du passage à une géométrie plus « théorique ». Quant aux **fonctions,** il s'agit d'une notion complexe, nouvelle pour les élèves de 3ème, même si leur apprentissage repose sur un grand nombre de prérequis (algèbre, lecture graphique), ce qui nous amène à regarder les liens qui pourront être faits pour à la fois s'appuyer et rompre avec les connaissances anciennes. De plus les fonctions font l'objet d'un exercice au Brevet des Collèges en fin de 3ème et prennent une place importante dans le programme de 2nde et dans la suite de la scolarité au lycée dans les cursus scientifiques ou non.

1. *Évolution des contenus : analyse épistémologique des notions choisies*

<u>Symétrie</u>

La symétrie axiale n'est pas seulement un concept mathématique, mais aussi, pour reprendre les termes de Vygotski (1934), un concept quotidien (Chesnais 2012). Le travail scolaire sur cet objet nécessite une articulation de ces deux aspects. Par ailleurs, nous distinguons la symétrie comme propriété d'une figure (aspect statique) et comme transformation géométrique (aspect dynamique) (Chesnais 2012). Mathématiquement parlant, l'aspect dynamique précède l'aspect statique, dans la mesure où l'existence d'un axe de symétrie dans une figure est la conséquence de l'existence d'une symétrie la conservant. En revanche, dans le concept quotidien, l'aspect dynamique est presque absent, excepté dans le mouvement de pliage, mais dans ce cas, une figure symétrique est une figure telle qu'une de ses moitiés est l'image de l'autre: le caractère symétrique n'est pas associé à l'invariance globale. Par ailleurs, l'association de la symétrie au pliage et au miroir (notamment du point de vue quotidien), renforce une conception erronée de la symétrie comme transformation d'un demi-plan dans un autre. Cette conception erronée, de même que le fait de ne pas articuler les aspects statique et dynamique de la symétrie n'empêche pas de réussir la plupart des tâches proposées à l'école, comme la construction du symétrique d'une figure située d'un côté de l'axe, ou trouver les axes de symétrie de figures élémentaires, mais l'articulation des deux aspects représente une composante de l'accès au concept mathématique. Certaines tâches permettent de travailler ces éléments : par exemple, construire la symétrique d'une figure coupée par l'axe ou compléter une figure pour qu'elle admette un axe de symétrie à partir de morceaux situés de part et d'autre de l'axe nécessitent de relier les aspects statique et dynamique de la symétrie ainsi que de dépasser la conception de la symétrie comme transformation d'un demi-plan dans un autre dans un seul sens.

Fonction

Une fonction est définie comme un processus qui à chaque nombre d'un ensemble donné associe un nombre et un seul. Elle peut être exprimée au moyen de différentes représentations au sein de différents registres (Duval 1993) :

- dans le registre algébrique, avec une expression algébrique, valable pour tout x d'un ensemble donné, dans laquelle x est une variable, et pas un nombre générique ou une inconnue comme c'est généralement le cas des équations étudiées jusque-là en algèbre;
- avec une formule qui donne le calcul à effectuer à partir de tout nombre x de l'ensemble de départ, et peut s'écrire globalement avec un formalisme nouveau par rapport à celui des expressions algébriques et des programmes de calcul : $f : x \rightarrow f(x)$;
- dans le registre numérique, sous forme d'un tableau de valeurs, qui donne un certain nombre de couples de nombres, formés d'un antécédent (nombre de départ) et de son image (le nombre que f lui associe), ce qui donne une représentation très ponctuelle et partielle de la fonction, puisqu'on ne peut pas en déduire en général d'autres couples de points;
- dans le registre graphique, à l'aide d'une courbe qui représente la correspondance entre les nombres de départ et d'arrivée, et permet en particulier d'observer les variations de la fonction (la façon dont f(x) se comporte lorsque x augmente, et réciproquement), ainsi que des propriétés de la fonction (parité, continuité, monotonie) qu'on n'impute généralement pas directement à une expression algébrique ou à un programme de calcul;
- il existe enfin aussi un registre formel, dans lequel on considère la fonction sans en donner une formule ni une représentation graphique, mais en la situant parmi des types de fonctions ayant certains attributs (affines, continues, croissantes…) ; certaines propriétés pouvant s'énoncer dans ce registre formel sans passer par les autres registres (comme la monotonie de la somme de deux fonctions croissantes, que l'on peut prouver en passant par le cadre algébrique par exemple).

La compréhension de la notion de fonction repose donc sur l'appropriation d'une articulation de cadres et registres qui, si elle se limite à une juxtaposition, ne permet peut-être pas de comprendre le sens de la notion et les potentialités de chaque cadre pour exprimer certains aspects d'une fonction et résoudre des problèmes mettant en jeux des fonctions (cf. Douady 1986). De plus les registres ne sont pas congruents, et le vocabulaire utilisé dans chaque cas n'est pas forcément le même (par exemple : « *la fonction f est positive* » et « *la courbe représentative de f est au-dessus de l'axe des x* ») ce qui peut renforcer les difficultés des élèves, surtout s'ils n'ont pas des occasions de prendre des initiatives en ce qui concerne le choix d'un registre pertinent ou le passage d'un registre à un autre, qui peut se faire de manière très automatisée (par exemple, remplir un tableau de valeurs à partir de la formule ou du graphique).

Cette acquisition de la notion repose aussi sur un certain nombre de prérequis liés au calcul numérique, à l'algèbre et à la gestion de données graphiques (dont on suppose la disponibilité pour pouvoir aborder les fonctions), mais on ne peut pas dire qu'elle prolonge ces notions, ce qui pose la question du lien de cette notion avec l'ancien. Qu'apporte ici la notion de fonction ? Que peut-on faire avec les fonctions qu'on ne peut pas faire sans ? Quel nouveau type de problème permettent-elles de résoudre (ou quel problème déjà connu permettent-elles de résoudre plus simplement ?). La notion de fonction est-elle alors Formalisatrice, Unificatrice, et/ou Généralisatrice (notion FUG) ? (cf. Robert 1998)

Pour ces deux notions, plusieurs conceptions sont possibles, reposant sur différents aspects et représentations, et l'on peut craindre que si cette variété n'est pas investie de la même façon de part et d'autre de la transition, les objets enseignés l'année passée ne soient pas facilement reconnus par les élèves au niveau supérieur.

2. *Évolution des contenus : analyse des programmes*

En France, les programmes scolaires « définissent les connaissances essentielles et les méthodes qui doivent être acquises au cours du cycle par les élèves ». C'est un cadrage national pour les manuels et les enseignants, pour organiser les enseignements.

Les contenus des programmes sont très peu différents en cycle 3 et en sixième en mathématiques. Toutefois, en géométrie, un changement du statut des objets doit être initié dès la classe de sixième pour permettre une entrée dans la géométrie déductive. La symétrie orthogonale est un des objets emblématiques de cette évolution dans le programme de sixième (Chesnais 2011).

En ce qui concerne les fonctions dans les programmes de 3ème et de 2nde, on peut noter de nombreux apports en 2nde par rapport à la 3ème :

- la définition de la notion de fonction est un objectif d'apprentissage pour la 2nde mais pas pour la 3ème, où la notion est proposée sans être rigoureusement définie dans son seul aspect « correspondance »[2] ;
- en 2nde on rajoute la notion de domaine de définition d'une fonction (donc un nouveau formalisme attaché à l'objet) ;
- on rajoute aussi de nouveaux problèmes, liés à l'étude qualitative des fonctions (variations, extremums sur un intervalle) ;
- on trouve aussi de nouveaux objets : les fonctions carrée, inverse, polynomiales de degré 2 ou homographiques (alors que le programme de 3ème ne propose que les fonctions affines) ;
- enfin, on trouve de nouveaux outils en 2nde, avec la résolution graphique d'équations et d'inéquations, pour résoudre des problèmes déjà abordés.

En 3ème, seule la notion les calculs d'images et d'antécédents sont proposés dans les programmes, et on peut penser que les manuels proposeront donc majoritairement ce type de tâche. La variété des tâches possibles est a priori plus grande en 2nde. D'après la lecture des programmes, on enrichit l'étude des fonctions par un grand nombre de caractéristiques nouvelles qui permettent peut-être d'en faire une étude plus globale que celle possible en 3ème avec le travail ponctuel sur image et antécédent.

Donc pour chacune des deux notions étudiées ici, on retrouve à la transition concernée des changements importants, aussi bien quantitatifs (variété des tâches proposées) que qualitatifs (changement de paradigme géométrique, de statut outil/objet), qui peuvent être à l'origine de difficultés pour les élèves. On conçoit que l'accompagnement de l'enseignant peut aussi intervenir, ne serait-ce que pour éclaircir ou non les changements attendus dans le travail des élèves (même si nous n'abordons pas ici cet aspect).

[2] Ce n'est pas un attendu du programme de 3ème que de présenter la notion de fonction sous ses autres aspects (dépendance, variation voire covariation).

3. Analyser les manuels : premiers éléments

Il s'agit d'une autre entrée dans les niveaux de conceptualisation visée, qui permet aussi d'introduire les études ultérieures de pratiques.

En France, il n'existe pas de manuel national : à chaque niveau, un grand nombre d'ouvrages sont disponibles, publiés par différents éditeurs. Les auteurs ont des statuts variés : professeur des écoles ou de collège et lycée, inspecteurs, formateurs d'enseignants ou chercheurs et ils choisissent les contenus librement, tout en respectant des critères commerciaux (nombre de pages, poids du manuel, conformité aux programmes et aux habitudes des enseignants). Dans les écoles, le choix du manuel utilisé peut revenir aux enseignants, de manière individuelle ou collective, ou à l'établissement.

Bien entendu on ne peut pas analyser les manuels comme on analyserait un scénario d'enseignement, car l'histoire ne dit pas quelle utilisation en sera faite, et en particulier :

- quels choix dans la multitude d'exercices.
- quelle dynamique (liens, allers-retours) entre cours et exercices.

Mais on peut supposer que les contenus des manuels constituent l'éventail de ce qui est à la disposition des enseignants pour faire la classe, et qu'une absence (de tâche, de discours, de rigueur mathématique) dans la plupart voire la totalité des manuels entraîne cette même absence dans ce qui est proposé par les enseignants.

4. Analyser les manuels : méthodologie

De manière générale, on va s'intéresser non seulement aux objets présentés dans les manuels, mais aussi aux aspects de ces objets privilégiés et à la façon dont ils sont travaillés (introduits, formulés, comment et pour quoi faire), à travers ce qui participe selon nous à leur conceptualisation :

- l'introduction de la notion : comment se fait-elle, elle est motivée par quoi ? quel nouveau est introduit et pour faire quoi, quelle raison d'être dans les programmes de ce niveau ? Cela amène à se pencher sur plusieurs points :
  - le lien avec l'ancien et les apports par rapport à l'ancien ;
  - le caractère outil attendu pour résoudre des problèmes.
- les cours : quelles définitions et propriétés sont données, quel vocabulaire est utilisé, avec quelle rigueur mathématique, quels exemples sont développés, ce qui amène aussi à regarder des éléments propres à chaque notion (registre, paradigme) compte tenu de l'analyse qui en a été faite, et des points qui ont été identifiés comme potentiellement sensibles pour les apprentissages des élèves :
  - **pour la symétrie**, cela nous amène à regarder comment sont travaillés les conceptions erronées, les aspects statique et dynamique de la symétrie, la manière dont le travail sur ces notions s'inscrit dans une logique d'initiation à une géométrie plus théorique, notamment en lien avec la distinction entre dessin et figure, en questionnant aussi quelle « mathématisation » des objets est visée en sixième.
  - **pour les fonctions** cela induit de regarder les apports du nouveau par rapport à l'ancien à travers les liens ou ruptures qui sont explicitement faits entre les deux aspects (comment on peut appréhender le fait que la fonction n'est pas « juste » une expression algébrique ou un graphique ?), les différents registres et leur articulation (comment présente-t-on les propriétés des fonctions dans les différents registres, indépendamment ou non) ? comment les met-on en parallèle,

voire en concurrence ? ou bien choisit-on un registre privilégié pour présenter chaque propriété ?), le formalisme introduit et ce qu'on en fait effectivement, le caractère global/ponctuel qui donne à voir ou non la fonction dans toute sa généralité, mais aussi le statut de la variable, et en particulier sans la notion de variation en 3ème et enfin la nature des fonctions, en réalisant un « herbier » pour voir ici aussi une variété ou non.

- les tâches : quelle utilité de la notion visée et pour résoudre quoi ? quelle variété des exercices, et quelles éventuelles tâches manquantes qui nous sembleraient pertinentes *a priori* pour donner du sens à la notion (par exemple des exercices induisant le passage du registre graphique au registre algébrique pour les fonctions), quelle complexité des tâches en terme d'adaptation à faire pour les élèves, en particulier des types de tâches et adaptations spécifiques à la notion que l'on vise :
  - **pour les fonctions**, quel travail sur les registres : mise en concurrence, limite ? ou juste traduction d'un registre à l'autre ? quelles initiatives de choix ou de changements de registres pour les élèves dans les exercices ? est-ce toujours forcé par l'énoncé ?
  - **pour la symétrie**, nous avons regardé la présence et les caractéristiques des tâches de construction de symétriques de figures, les tâches de reconnaissance d'axes de symétrie de figure, ainsi que plus particulièrement les tâches qui permettent de travailler sur l'articulation des aspects statique et dynamique, à savoir les tâches qui consistent à compléter une figure pour qu'elle admette un axe de symétrie ou à reconnaître des axes de symétrie sur des « figures doubles » ou encore des tâches qui permettraient de travailler sur l'aspect statique en introduisant l'idée d'invariance globale.

5. Différentes analyses de manuels : nos résultats en parallèle, puis en perspective

Nous avons regardé :

- les manuels d'un même niveau pour chercher des régularités ou une grande variabilité ;
- les manuels des deux niveaux pour repérer des différences liées à la transition.

On peut noter une différence a priori entre les deux transitions, à savoir que les manuels de CM2 sont souvent organisé de manière assez linéaire, les notions n'étant pas regroupées par chapitre, mais réparties page après page sur toute l'année (pour permettre une progression éventuelle en suivant les pages du manuel) alors que ce n'est pas le cas en 6ème. Il n'y a pas de différence aussi marquée entre les manuels de de 3ème et de 2nde, même si la variabilité est plus grande en 2nde.

<u>Symétrie</u>

Dans les deux niveaux, la prise en considération des conceptions erronées (par des tâches spécifiques ou dans la construction des contenus en général) est très inégale.

Concernant l'articulation entre les aspects statique et dynamique de la symétrie, seuls cinq manuels sur les huit étudiés contiennent au moins une tâche consistant à compléter une figure par symétrie, malgré les recommandations explicites des programmes. Cinq sur huit également contiennent des tâches concernant l'identification d'axes sur des figures doubles. Seuls deux manuels sur huit contiennent ces deux types de tâches. Ces deux manuels sont également ceux qui incluent un travail permettant de mettre en cause la conception erronée de transformation d'un demi-plan dans un autre. L'un d'eux propose également une première approche des propriétés de la symétrie qui seront retravaillées dans un contexte plus théorique en sixième.

La moitié des manuels de sixième sépare ce qui correspond à chacun des aspects de la symétrie dans deux chapitres différents. Trois d'entre eux mentionnent des « figures doubles » dans le chapitre à propos des axes de symétrie : cela favorise l'établissement du lien entre les deux aspects. A propos de l'aspect statique également, trois d'entre eux limitent le travail à la reconnaissance perceptive (comme à l'école primaire). La moitié des manuels mentionne l'invariance globale, mais parfois d'une manière peu logique : l'un la mentionne avant de parler de la transformation; trois relient le pliage et l'invariance globale mais seul l'un d'entre eux la mentionne dans la leçon, tandis que cela n'est abordé qu'en exercice dans les deux autres. Tous les manuels contiennent des tâches de construction de symétriques de figures coupées par l'axe.

Des tâches permettant l'entrée dans une géométrie plus théorique, nécessitant des raisonnements sur les figures indépendamment des dessins sont présentes dans tous les manuels de sixième, à propos de la symétrie. Toutefois, seul un manuel prend en charge explicitement une clarification du changement de statut des objets et des rapports entre observation, mesurage et démonstration, tandis que cela reste implicite dans les autres.

En conclusion, nous pouvons affirmer que les approches des manuels peuvent être très différentes et qu'elles ne prennent pas en considération la transition de la même manière. Notamment, certains manuels de CM2 choisissent d'introduire des notions ou tâches qui correspondent aux attentes des programmes de 6ème, tandis que d'autres font d'autres choix : par exemple, Euromaths prépare la transition en travaillant précisément sur les difficultés, conceptions erronées et spécifiquement le sens des concepts (aspects statique et dynamique de la symétrie). Selon les manuels, les conceptions erronées sont travaillées ou non. Quant aux manuels de sixième, certains considèrent qu'un certain niveau de conceptualisation a déjà été atteint par les élèves, en contradiction avec ce qui est effectivement abordé dans les manuels de CM2.

Le travail d'identification des acquis des élèves et de dépassement de certaines conceptions erronées reste donc de la responsabilité du professeur.

<u>Fonction</u>

En 3ème, on trouve un étiquetage variable et flou des définitions et propriétés (et pas de définition de fonction, conformément aux programmes). C'est moins vrai en 2nde, où les quantifications sur la variable sont malgré tout toujours assez peu présentes. On constate en 3ème un formalisme peu exploité et un caractère global de la fonction qui a peu d'occasions d'être rencontré, faute de pouvoir faire travailler sur les propriétés des fonctions telles que la monotonie ou la parité, qui ne sont pas au programme de 3ème. Il n'y a pas d'articulation ni de mise en relief des registres dans les manuels de 3ème qui présentent la notion en parallèle dans les différents registres sans évoquer les potentialités et les limites de chacun, ni même les liens (exprimer un même phénomène dans plusieurs registres, choisir un registre pertinent pour résoudre un problème). Les propriétés sont généralement exprimées dans un seul registre à la fois.

En 2nde, on trouve un nombre très important d'exercices variés (souvent plus d'une centaine par chapitre !) surtout par rapport à la 3ème où on trouve des tâches assez répétitives, en particulier sur le calcul d'image et d'antécédent (passage indiqué du registre graphique ou algébrique au registre numérique, généralement sans initiative pour les élèves) et en nombre plus limité (à relier avec la préparation au Brevet des Collèges ?). Il y a peu de variabilité d'un manuel de 3ème à l'autre sur ce point.

En 2nde on trouve une plus grande variété entre les manuels et sur la façon dont ils motivent l'introduction des fonctions ; avec quelques problèmes d'optimisation dans certains manuels. Le cours ne semble pas beaucoup plus riche sur l'articulation des registres, mais la variété des exercices permet davantage un travail de passage d'un registre à l'autre, avec plus d'initiatives (potentiellement moins répétitif, moins automatisable ?)

Finalement on peut noter une plus grande variabilité des manuels de 2nde par rapport à ceux de 3ème, peut-être à rapprocher des contraintes liées au Brevet en fin de 3ème et, a contrario, des orientations différenciées des élèves après la 2nde. Mais l'articulation des registres n'est pas explicitement faite, en 3ème comme en 2nde ; en revanche le formalisme, qui permet en particulier de voir le caractère global de la fonction, n'est pas très utilisé en 3ème alors qu'il l'est déjà plus en 2nde. Sur ce point, on ne constate donc pas d'anticipation en 3ème sur ce qui sera fait en 2nde, à relier aux préconisations des programmes, et, encore une fois, à la préparation du brevet (avec des tâches ponctuelles sur image et antécédent et des passages indiqués du registre algébrique (ou numérique) au registre graphique).

Dans les deux cas on note une absence d'articulation des aspects qui caractérisent ces notions, plus grande au niveau inférieur des deux transitions. On peut y voir aussi un manque fréquent de prise en compte de ce qui sera traité au niveau supérieur : peu de travail sur les conceptions erronées liées à la symétrie pour préparer à l'entrée en 6ème d'une part, et d'autre part un travail plutôt technique sur les fonctions en 3ème (recherche d'image / d'antécédent) qui ne donne probablement pas à voir le caractère global de l'objet fonction ni son caractère outil, et n'assure pas aux élèves d'arriver en 2nde en ayant réellement abordé le concept de fonction, contrairement à ce que pourraient penser les enseignants de lycée. Dans les deux cas, l'analyse des programmes scolaires respectés par les manuels analysés explique en partie ces écarts.

III. CONCLUSION : VERS QUELLES ETUDES DES PRATIQUES EFFECTIVES ?

1. Comparaison de « ce qu'on trouve en classe » et de «ce qui est/n'est pas dans les manuels » : le cas de la symétrie

L'analyse des manuels nous informe sur l'éventail des possibles (en ce qui concerne les cours et les tâches) à la disposition des enseignants, mais nous ne pouvons pas en déduire comment ils sont effectivement utilisés par les enseignants, qui peuvent s'appuyer sur un ou plusieurs manuels, ou sur aucun, avec des différences éventuelles sur l'usage des ressources.

Pour la symétrie, on se demande quelle prise en charge par les enseignants des enjeux identifiés comme problématiques a priori : comment les enseignants de CM2 « préparent » à la sixième et comment les enseignants de sixième tiennent compte des acquis des élèves, comment ils articulent à leurs connaissances anciennes. Notamment, nous nous intéressons au travail sur les conceptions erronées, les deux aspects de la symétrie et leur articulation.

De premiers résultats (Chesnais & Munier 2013) indiquent que les observations en classe confortent les analyses faites dans les manuels. On constate une grande diversité dans ce qui est abordé ou non en CM2 et sur la nature du travail demandé aux élèves (axé sur l'acquisition d'algorithmes relevant éventuellement plus de la sixième ou bien sur un travail plus conceptuel, notamment sur les conceptions erronées). En sixième, on retrouve une non-identification d'un certain nombre d'enjeux, considérés comme non problématiques ou déjà acquis (à tort), en particulier sur la mathématisation des objets, l'introduction de la mesure (le sens même de ce qu'est une mesure, de la notion de précision et d'incertitude), ainsi que l'entrée dans la géométrie théorique (par exemple sur la distinction entre dessin et figure).

Pour donner un exemple précis, les enseignants de sixième prennent manifestement pour acquis le lien entre symétrie et pliage, y compris en considérant que les élèves maîtrisent des techniques de construction ou de vérification de symétriques par pliage ou usage du calque alors que cela n'est pas travaillé dans toutes les classes de cycle 3.

On peut faire l'hypothèse que l'on risque de retrouver dans beaucoup de classes de 2^{nde} cette même absence de prise en compte des enjeux liés aux fonctions (changements de registre ou de point de vue) et non encore acquis en fin de collège.

2. Comment analyser les pratiques ?

Côté enseignants, il s'agit de reconstituer les pratiques individuelles et dans une certaine mesure collectives (cf. régularités, problèmes de la profession) – dans leur complexité. C'est ici une méthodologie différente de celle utilisée pour l'analyse des manuels, car, même si elle tient compte des spécificités des notions mathématiques énoncées plus haut, elle s'attache à des études de cas, dans la mesure où nous ne savons pas encore mettre en œuvre des études qualitatives à grande échelle sur les enseignants comme nous pouvons le faire sur les manuels.

Les outils de caractérisation didactique développés ici nous permettent d'anticiper des difficultés probables pour les élèves, liées à ces notions et à leur traitement différent à chaque niveau, d'affiner nos observations en classe pour repérer la façon dont les enseignants prennent ou non en compte ces difficultés, et mesurer ainsi des écarts plus ou moins grands entre les deux années. On peut supposer que le rôle des moments d'exposition des connaissances sera décisif à cet égard d'autant que les habitudes institutionnelles diffèrent (peu développés en CM2, présents en 6ème et en 3ème, importants en 2nde).

REFERENCES

Bednarz N., Lafontaine J., Auclair M., Morelli C., Leroux C. (2009) Pour une plus grande harmonisation dans la transition du primaire au secondaire en mathématiques. *Bulletin de l'AMQ* XLIX (1), mars 2009.

Benzekry B., Fauvé C., Robert A., Rousse S., Vuong M., Zélicourt C. (2011) La transition Troisième/Seconde. Constats et questions à partir de la comparaison d'exercices variés des deux niveaux. *Repères IREM* 83, 5-37.

Chesnais A. (2011) Apprentissages mathématiques en sixième : contextes différents, pratiques différentes et inégalités. *Revue Française de Pédagogie*, 176, 57-72.

Chesnais A. (2012) L'enseignement de la symétrie orthogonale en sixième : des contraintes, des ressources et des choix. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 32(2), 229-278.

Chesnais A., Munier V. (2013) Learning and teaching geometry at the transition from primary to secondary school in France: the cases of axial symmetry and angle, *Proceedings CERME 8*, 595-604.

Colomb J., Guillaume J.-C., Charnay R. (1987) Articulation école/collège, quels contrats disciplinaires en mathématiques. *Revue Française de Pédagogie* n°80, 25-36.

Douady R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2), 5-31.

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives* 5, 37-65.

Grugeon B. (1997) Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire, *Recherches en didactique des mathématiques* 17(2), 167-210.

Robert A. (1998) Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 18(2), 139-190.

Robert A. (2007) Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré) : une hypothèse, des inférences en formation. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 27/3, 271-311.

Robert A. (2008) Problématique et méthodologie communes aux analyses des activités mathématiques des élèves en classe et des pratiques des enseignants de mathématiques. In Vandebrouck F. (Ed .) *La classe de mathématiques : activités d'élèves et pratiques d'enseignants* (pp. 31-69). Octarès, Toulouse.

Salin M.-H. (2003) Comprendre les difficultés des élèves à passer de la « géométrie de l'école primaire » à la « géométrie du collège ». *Actes du colloque international « Espace Mathématique Francophone »*. CD-ROM. Tozeur, Tunisie, 19 au 23 décembre.

Vygotsky L. [1934] (1997) *Pensée et langage*. Paris : La Dispute.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

ABORDER LES QUESTIONS DE TRANSITION DANS UNE PERSPECTIVE D'HARMONISATION

Claudia CORRIVEAU*

Résumé – La transition entre les mathématiques au secondaire et au postsecondaire est principalement étudiée sous l'angle de la différenciation : des façons de penser distinctes (Tall 1992), des mathématiques de natures différentes (Robert 1998), pour des contenus apparemment communs, des organisations mathématiques qui se distinguent (par exemple Bosch & al. 2004, Gueudet 2004; Winslow 2007); des cultures mathématiques différentes (Artigue 2004), etc. L'idée d'une articulation possible entre les ordres est rarement étudiée. Cette proposition présente une façon de mener d'aborder les questions de transition en introduisant une perspective d'harmonisation, dans laquelle le dialogue entre les enseignants des deux ordres est au premier plan et facilite l'émergence de nouvelles façons de faire des mathématiques à chacun des ordres.

Mots-clefs : Transition secondaire postsecondaire, manières de faire des mathématiques, perspective d'harmonisation, fonctions

Abstract – The transition between secondary and postsecondary levels is mainly looked at in terms of differentiations: different ways of thinking (e.g. Tall 1995); different natures of mathematics (Robert 1998); different mathematical organizations (e.g. Bosch & al. 2004); different mathematical cultures (Artigue 2004); etc. The idea of a possible harmonization between the levels is rarely studied. This paper presents a new way to work on transitional issues, introducing a harmonization perspective in which dialogue between teachers of both levels facilitates new ways of thinking and doing mathematics at their specific levels.

Keywords: Secondary-postsecondary transition, ways of doing mathematics, harmonization perspective, functions

I. INTRODUCTION

Des chercheurs de plusieurs pays soulignent que le passage du secondaire au postsecondaire est sensible pour les élèves qui n'en décodent pas toujours les nouvelles règles du jeu (Tinto 1993; Coulon 1993). C'est le cas notamment en mathématiques où cette transition constitue un enjeu de taille au regard de la réussite des élèves. Au Québec, plusieurs élèves ont des difficultés à cerner les exigences de certains cours à leur arrivée au collégial[1] (Chenard & al. 2007).

* Université Laval – Canada – claudia.corriveau@fse.ulaval.ca

[1] Tout en rejoignant les travaux menés dans d'autres pays sur la transition secondaire supérieur, cette étude s'inscrit dans un contexte spécifique, différent de celui de ces travaux. Au Québec, l'ordre collégial, d'une durée de deux ans (12^e et 13^e années) pour les programmes pré-universitaires (options sciences, sciences de la santé, sciences humaines), et de trois ans pour les programmes professionnels, suit le secondaire et est préalable à l'université. Il est attaché, tout comme

Corriveau C. (2015) Aborder les questions de transition dans une perspective d'harmonisation. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – Spé3, pp. 982-993.

Les moments de transition occasionnent en effet des difficultés importantes chez les élèves (Corriveau & Tanguay 2007; Najar 2011; Praslon 2000; Vandebrouck 2011*a*), mais aussi par leurs enseignants (Corriveau 2007, 2013). Cette transition a été abordée de diverses façons par les chercheurs en didactique des mathématiques. Plusieurs induisent des difficultés de transition par une étude des mathématiques au postsecondaire. Par exemple, Tall (1992, 1995) définit ce qu'est la pensée mathématique avancée en la différenciant des processus cognitifs élémentaires en mathématiques. De ce point de vue, la transition exige une reconstruction cognitive de la part des élèves. D'autres chercheurs s'entendent pour dire que la nature formalisatrice, unificatrice et généralisatrice (Robert 1998) des concepts abordés dans l'enseignement postsecondaire commande un niveau d'abstraction et de généralisation à la source de plusieurs difficultés des étudiants (Edward, Dubinsky & McDonald 2005; Harel & Tall 1991; Luk 2005). C'est en partant de leurs travaux, menés au postsecondaire, que les chercheurs cernent des problèmes et difficultés liés à la transition. D'autres ont considéré les deux ordres en étudiant la transition par le biais d'une comparaison des manuels et des tâches mathématiques des deux ordres autour de contenus spécifiques. Par exemple, en s'appuyant sur la théorie anthropologique du didactique (Bosch & Chevallard 1999) plusieurs chercheurs ont mis en lumière les organisations mathématiques à chacun des ordres. Bosch et al. (2004), Gueudet (2004), Najar (2011) et Winsløw (2007) viennent éclairer sur différents contenus, la nature différente des praxéologie mathématiques en jeu. D'autres études, centrées sur une analyse de tâches à propos d'un même contenu aux deux ordres, ont abordé cette transition par le concept de domaine de travail pour caractériser ces transitions. Vandebrouck (2011*b*) repère ainsi les différents « domaines de travail » (Robert 2003) autour du concept de fonction, du Lycée à l'université, en croisant une étude des travaux en didactique des mathématiques et une analyse des programmes, des manuels et des notes de cours.

Peu de travaux de recherche en didactique des mathématiques ont abordé la transition sous l'angle d'un rapprochement entre les ordres. Parmi les chercheurs qui se sont intéressés à cette question de l'articulation entre les deux ordres secondaire postsecondaire, figurent les études de Bloch (2000) et Praslon (2000) en regard de l'enseignement et l'apprentissage de l'analyse. Bloch (2000) a conçu et expérimenté deux situations d'enseignement dans une classe à la fin du lycée en France, documentant l'apport de celles-ci pour l'apprentissage des élèves. Ces résultats ont été mis en relation avec les connaissances préalables que requiert le cours d'analyse à l'université, connaissances qu'elle a mises en évidence par l'analyse de transcriptions de cours et de productions d'étudiants universitaires dans ces cours. Bloch conclut qu'il est possible de mettre en place, pour les élèves de la fin du secondaire, un enseignement de l'analyse à la jonction secondaire-postsecondaire. Quant à Praslon, en plus d'une étude comparée de tâches de manuels du lycée et d'universités en analyse, il a proposé à des étudiants de première année universitaire des ateliers en petits groupes autour de tâches préparant à la transition. Ces ateliers, conçus par le chercheur, ont été élaborés suite à l'analyse comparative des tâches aux deux ordres. Selon Praslon, dans le domaine de l'analyse, le passage du secondaire au postsecondaire s'accompagne d'une accumulation de

---

l'université, à l'enseignement supérieur. Les établissements d'enseignement collégial, créés à la fin des années 1960, sont indépendants des instances secondaires (7^{e} à 11^{e} années) et universitaires et mènent, comme le secondaire et l'université, à une diplômation qui leur est propre (diplôme d'études collégiales, DEC). Les enseignants du collégial ont une formation disciplinaire (maîtrise en mathématiques, en littérature, en histoire géographie, etc) et ont accès à des subventions de recherche. Mais contrairement à l'université, ils ne sont pas tenus de faire de la recherche. Il peut donc paraître délicat de parler du phénomène de transition interordres d'un point de vue international, les institutions scolaires, comme le souligne Gueudet (2008), différant d'un pays à l'autre.

micro-ruptures. Praslon confirme l'existence d'un « vide didactique »[2] que les étudiants doivent eux-mêmes combler dans la transition. Les expérimentations réalisées par Bloch, au secondaire, et Praslon, à l'université, sont des tentatives en ce sens pour ne pas laisser ce vide didactique à la seule charge des élèves, et faciliter le passage du secondaire au postsecondaire, en lien dans ce cas avec l'apprentissage de l'analyse.

Remarquant que les enseignants sont peu présents dans les travaux à propos de la transition, dans notre recherche, nous avons voulu considérer leurs points de vue pour travailler autour de cette question. Leur expérience d'enseignement peut certainement être mise à profit dans l'exploration de ce qui peut être fait à leurs niveaux respectifs pour surmonter les problèmes de transition. Pour cette raison, nous avons également engagé un dialogue entre les enseignants des deux ordres. Ces enseignants ne travaillent habituellement pas ensemble; ils vivent dans des mondes différents ou dans des cultures mathématiques différentes (Artigue 2004). Ils ont peu d'occasions d'échanger autour de l'enseignement des mathématiques. Comme le soulève Bednarz (2008) en ce qui a trait à la transition primaire secondaire, et qui est tout aussi pertinent pour la transition secondaire collégial, « un tel isolement est peu propice à une transition harmonieuse pour les élèves » (p. 2).

Ces deux considérations (travailler avec des enseignants et engager un dialogue) a permis, d'une part, l'exploration de ce qui se fait aux deux ordres, mais, d'autre part, a permis d'aller plus loin dans une perspective d'harmonisation. C'est ce dont il est question dans cette proposition. Lorsque des enseignants des ordres secondaire et collégial explorent ensemble la transition, de quelles façons l'harmonisation est-elle approchée dans cette exploration ? Comment se développe-t-elle ?

II. UNE RECHERCHE COLLABORATIVE POUR UNE FAVORISER LE DIALOGUE ENTRE DES ENSEIGNANTS DES DEUX ORDRES

Un groupe de six participants (trois enseignants du secondaire et trois enseignants postsecondaires) ont été invités à se joindre à un projet de recherche collaborative, dispositif de recherche dans lequel le chercheur travaille avec les praticiens sur une question liée à leur pratique (Bednarz 2013; Desgagné 2001). Ici, il s'agissait de créer un groupe d'enseignants du secondaire et du collégial autour de la transition. Pour travailler avec les enseignants, un objet précis d'étude lié à leur pratique a été choisi. Comme nous le disions, Artigue (2004) traite de questions de transition en termes de culture mathématique, reprenant les travaux de Hall (1959). Artigue a tenté de caractériser la culture mathématique du secondaire basé sur une analyse de son programme (la partie explicite de la culture). Toutefois, selon Hall, ce sont les « manières de faire » implicites qui conduisent aux plus grandes différences culturelles. Dans la salle de classe, les enseignants font des mathématiques d'une certaine manière et font faire des mathématiques à leurs élèves. Donc, nous avons décidé de travailler sur les questions de transition par le biais des « manières de faire des mathématiques » des enseignants à chaque ordre. Des contenus mathématiques ont aussi été négociés au sein du groupe. Le thème des fonctions a été retenu par les enseignants des deux ordres. Le projet s'est déroulé sur un an. Il y avait des réunions régulières: une réunion pour expliquer le projet et six journées complètes (de 7 heures) pour travailler autour de la transition. Toutes ces réunions ont été enregistrées et transcrites.

---

[2] Selon l'analyse des tâches qu'a faite Praslon (2000), les tâches du postsecondaire sont tout à fait inhabituelles pour les étudiants qui arrivent du lycée. Du point de vue de l'activité mathématique (comme le degré de généralité, l'usage du formalisme, etc.), ces tâches ne sont pas maîtrisées par les étudiants du Lycée. Or, ces tâches ne font pas l'objet d'une gestion particulière dans la transition, ce qui crée un « vide didactique ».

III. FONDEMDENT THÉORIQUE : L'ETHNOMÉTHODOLOGIE

Dans le cadre de notre recherche, nous avons fait appel à des horizons épistémologiques, théoriques et conceptuels en accord avec notre position initiale, soit celle de considérer les enseignants comme des acteurs clés pour l'étude des transitions (on ne peut s'inspirer de cadres théoriques dans lesquels l'enseignant, ou l'acteur ne serait pas central et où son expertise ne serait pas reconnue). L'ethnométhodologie (Garfinkel 1967) fournit des éléments pertinents pour mieux comprendre, d'un point de vue théorique, comment se constituent les manières de faire des mathématiques des enseignants dans le cadre de leurs pratiques quotidiennes. D'un point de vue terminologique, ethnométhodologie renvoie à « ethnométhodes », et à « logie » et signifie donc l'étude des ethnométhodes. L'ethnométhodologie n'est donc pas une méthodologie de recherche, mais elle sert de fondement conceptuel en se proposant d'étudier les façons de faire banales que les acteurs mobilisent afin de réaliser leurs actions de tous les jours (Coulon 1993).

En ethnométhodologie, on conçoit toute activité socialement organisée comme continuellement en train de se faire, constamment constituée et actualisée par les acteurs : un monde d'interactions sociales perçues et interprétées par les acteurs en continuelles négociation et construction de sens. Dans cette perspective, le point de vue des acteurs est central puisque c'est en assignant un sens à ce qui les entoure qu'ils constituent leur monde social (Coulon, 1993), ou toute activité organisée (comme enseigner les mathématiques pour un enseignant). On accorde en ce sens une grande importance à la rationalité de l'acteur, laquelle selon Garfinkel, « situe le thème central de [ses] recherches : ce caractère rationnel des descriptions d'actions pratiques, vu comme résultat d'une performance pratique et continue » (Garfinkel 1967, p. 13).

À partir du concept central d'ethnométhode, nous avons développé, dans le cadre de la recherche, le concept d'ethnométhodes mathématiques (Corriveau 2013; Corriveau & Bednarz 2013), qui sont les MFM mobilisées par les enseignants dans leur vie de travail quotidiennes. Ces ethnométhodes mathématiques concernent donc l'action : des MFM partagées par des enseignants d'un niveau spécifique, supportées par un *rationnel* et liées à des *circonstances* particulières (des circonstances qui délimitent les MFM). Le concept d'ethnométhode est aussi lié à l'acteur dans la mesure où les manières de faire reposent sur les capacités interprétatives des enseignants qui reconnaissent, constituent et actualisent ce qui signifie que « faire des mathématiques » à leur ordre donné. Cette théorie est susceptible d'être utile dans la compréhension de « manières de faire » familières pour des enseignants d'un même ordre (par exemple quelles sont les MFM en lien avec les fonctions à chaque ordre), mais permet par ailleurs de considérer les nouvelles « manières de faire » susceptibles d'être développées à travers l'exploration conjointe de la transition par les enseignants.

L'exemple des MFM autour des fonctions

Le thème des fonctions a occupé une place prépondérante dans le cadre des rencontres de l'activité réflexive[3] (plus du tiers des séances). Le dialogue a tourné autour des activités habituelles des enseignants en lien avec les fonctions : la chercheuse a présenté les tâches, comme base de discussion, développées autour d'actions que les enseignants posent quotidiennement dans leur pratique (choisir des tâches, anticiper le travail des élèves,

[3] Il a été retenu par les enseignants lors d'une rencontre d'information. Ce contenu apparaît important dans l'activité professionnelle des enseignants du secondaire (il fait partie des programmes de 4^e et 5^e secondaires, en constitue une partie importante en termes de temps) et dans celle du collégial (il est repris dans les deux premiers cours de calcul différentiel et intégral du cégep). Comme ce contenu est commun aux deux ordres, il était intéressant de s'y intéresser pour comprendre les MFM qui se constituent à propos des fonctions à chacun des ordres.

organiser un enseignement). Avant d'entreprendre un travail d'harmonisation, il nous a fallu comprendre les MFM autour des fonctions à chacun des ordres. Ces MFM ont été explicitées à travers ces tâches et la première partie de notre travail d'analyse a été de mettre en évidence un certain territoire[4] de MFM avec des fonctions à chaque ordre. Le tableau 1 présente un bref aperçu du territoire de chaque ordre (voir Corriveau 2013).

Territoire des enseignants du secondaire	Territoire des enseignants du collégial
MFM Les enseignants impliqués dans la recherche associent une table de valeurs, un graphique ou une expression algébrique à une fonction (à l'étude). Ils esquissent le graphique d'une fonction à partir d'un tableau de valeurs ou une expression algébrique (en utilisant les paramètres, dans la forme canonique). Ils utilisent une certaine symbolisation pour représenter la fonction de base (par exemple, $f(x) = x^2$) et ils introduisent progressivement les paramètres pour représenter toutes les fonctions possibles (dans la famille des fonctions quadratiques par exemple, $f(x) = a(bx\text{-}h)^2 + k$).	MFM Les enseignants du collégial ayant participé à la recherche mentionnent qu'ils retracent le comportement de n'importe quelle fonction à partir d'une expression algébrique. Ils mobilisent des outils pour retracer le comportement d'une fonction et pour tracer le graphique. Ils anticipent les comportements limites d'une fonction en tout point, à partir d'une expression algébrique ou d'un graphique.
Rationnel lié à des considérations institutionnelles Les différentes représentations sont considérées comme un moyen de donner un sens à chaque groupe de fonctions à étudier (par exemple une fonction quadratique a ce genre de forme sur un graphique, ce type de variation dans le tableau de la valeur, et est identifiable par ce type d'expression algébrique).	**Rationnel de l'ordre d'exigences institutionnelles** Un des buts du cours de calcul différentiel est de tracer le graphique d'une fonction complexe et donc, d'arriver à comprendre son comportement. De plus, ils veulent préparer les étudiants à des études scientifiques à l'université.

Tableau 1 - *Territoires à propos du travail sur les fonctions (et les représentations) constitué par les enseignants*

Dans le cadre de la deuxième rencontre, nous avons commencé à travailler sur l'harmonisation.

IV. RECONSTRUCTION D'UNE TRAJECTOIRE D'HARMONISATION A PROPOS DES FONCTIONS

De l'analyse, nous avons pu reconstruire une trajectoire d'harmonisation en trois temps : (A) un premier temps dans lequel vont émerger des idées clés qui serviront de tremplin dans la construction qui suivra; (B) un deuxième temps portant sur les modes de représentation (tableaux de valeurs et tableaux de variation) qui sert à enrichir la construction amorcée au temps 1; et (C) un troisième temps d'élaboration de tâches concrètes par les enseignants du secondaire et du collégial. Chaque temps se décline en plusieurs *moments clés* dans cette trajectoire. Dans le cadre de cette proposition, nous présentons le premier temps de la trajectoire qui se décline en trois moments.

La reconstitution de ce premier temps est issue des données provenant de la discussion entre un enseignant du secondaire (Scott) et deux enseignantes du collégial (Corinne et Colette) lors d'une deuxième rencontre.

[4] Le territoire est une métaphore parlante pour signifier l'idée d'une « terre » qu'on organise, qu'on aménage pour y « vivre » (Raffestin, 1981). C'est un espace en continuelle organisation. Autrement dit, les enseignants organisent, de manière cohérente, un territoire familier à propos des fonctions, dans lequel ils se reconnaissent entre enseignants d'un même ordre. Le « voyageur » étranger ne s'y reconnaîtra pas nécessairement.

1. *Moment 1 : émergence d'une première idée clé (importance du registre graphique)*

Ce premier moment de la trajectoire s'est constitué dans des discussions informelles entre les enseignants. L'analyse des échanges fait ressortir progressivement l'importance du registre graphique pour les enseignants et éventuellement les raisons d'un tel choix. Le graphique apparaît pour les enseignants comme un mode « parlant » pour les élèves. Scott relate que ses élèves peuvent résoudre des systèmes de deux équations aisément de manière algébrique, mais qu'ils sont incapables d'interpréter les résultats : « Algébriquement ce qu'on obtient c'est spécial [fait référence à une résolution qui donnerait par ex. 0 = 7] ça fait comme si on s'était trompé. Graphiquement, certains se rendent compte pourquoi : 'ah, c'est parce que c'est parallèle, y'a pas de point de rencontre' ». Ainsi, Scott mentionne qu'il travaille la résolution dans le graphique (en articulation avec la résolution algébrique), un registre « parlant » pour donner sens à l'interprétation algébrique (*donner sens*, rationnel invoqué par les enseignants du secondaire). Lorsque la chercheuse reprend les propos de Sam « donc graphiquement, il y a quelque chose qui 'parle' aux élèves alors qu'algébriquement ça n'est pas nécessairement le cas ? », Corinne enchaîne en relatant un événement dans lequel elle avait demandé aux étudiants de trouver un domaine. Ceux qui avaient utilisé un graphique avaient tous réussi. Elle aussi confirme que le mode graphique est « parlant » pour trouver les caractéristiques de la fonction (ici le domaine). On retrouve donc ce que les enseignants du collégial recherchent dans un mode de représentation (*retracer le comportement en tout point du domaine*, MFM).

Cet élément central restera dans la trajectoire à venir : **celui du mode graphique comme d'un mode « parlant » pour les élèves et les étudiants.** Il s'agit en effet d'un élément sur lequel les enseignants s'entendent (un mode de représentation important aux deux ordres).

2. *Moment 2 : des constatations de part et d'autre et la création d'un contraste et d'un vide à combler*

Lors de la première rencontre, les enseignants parlaient déjà du registre graphique comme d'un registre important dans le contexte des fonctions et la chercheuse avait senti le besoin, en lien avec le travail amorcé, de demander aux enseignants ce que signifiait travailler avec les fonctions à leur ordre. Cette question, lancée dans l'action avait pour but de faire apparaître des MFM en lien avec les fonctions via des attentes et un rationnel, de façon à dégager les éléments importants à chacun des ordres.

La chercheuse a noté au tableau ce qui ressortait globalement (dans ce qui était alors dit) pour le secondaire et le collégial, s'assurant que les enseignants se reconnaissaient bien dans ce qu'elle écrivait (voir figure 1). La chercheuse voulait que cette figure soit utilisée comme base de réflexion dans une perspective d'harmonisation. À gauche, elle a écrit sommairement ce qui se fait au secondaire autour des fonctions, et à droite, ce qui se fait au collégial. La question mise en avant était donc : *comment au secondaire s'approcher du collégial, et au collégial, s'approcher du secondaire ?*

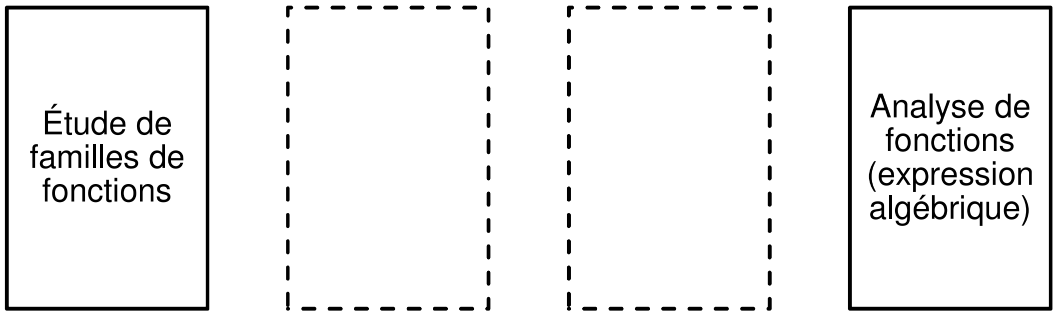

Figure 1 *- Schéma 1 utilisé comme base de réflexion*

Il est intéressant de constater ici que plusieurs façons schématiques de lier le secondaire et le collégial auraient pu être mis en avant par la chercheuse. **Implicitement, en faisant ce schéma, elle met en œuvre une façon de concevoir l'harmonisation (qui se place, pour elle, à chacun des ordres) et essaie d'établir des ponts, de se rapprocher de l'autre.** D'autres schémas auraient en effet été possibles. Par exemple, en mettant ce qui se fait au secondaire et au collégial côte à côte (sans les rectangles vides au centre), l'exercice de lier la manière de travailler les fonctions à chacun des ordres aurait pu conduire à penser l'harmonisation dans le sens suivant : qu'est-ce qui prépare à quoi ou qu'est-ce qui est le prolongement de quoi ? Ou encore comment passer de l'un à l'autre ? L'utilisation d'un seul rectangle vide aurait pu mener à tenter de trouver des manières de travailler communes aux deux ordres. La figure retenue dans l'action par la chercheuse n'est donc pas anodine : elle a orienté la réflexion autour de la perspective d'harmonisation d'une certaine façon; elle sous-entend en effet « qu'est-ce qui n'existe ni au secondaire, ni au collégial, et qui pourrait se situer entre les deux, dans le territoire du secondaire ou dans celui du collégial. » Les liens à créer sont en dehors de ce qui se fait au secondaire et au collégial mais en même temps, doivent être plausibles au secondaire (dans le cas du premier rectangle vide) et au collégial (dans le cas du deuxième rectangle vide).

3. *Moment 3 : des ponts possibles à chacun des ordres pour se rapprocher de l'autre*

Une discussion autour des liens entre ce qui se fait de part et d'autre sur les fonctions (au secondaire et au collégial) a suivi. Scott met alors en évidence ce à quoi on s'attend de l'élève au secondaire : qu'il connaisse et soit capable d'identifier différents modèles de fonctions de base. Il mentionne de plus qu'ultimement, même si l'élève est confronté à un mélange de fonctions (il fait référence au travail qui l'attend au collégial), il doit se dire « une x carré par une racine de x [$x^2\sqrt{x}$], ça ne m'énerve pas parce qu'une $\sqrt{x}$, je sais c'est quoi et un x^2 aussi » (Scott, reprenant les propos fictifs d'un élève). Or, en réalité, dit-il, « on ne le fait vraiment pas dans cette optique-là ». Ce que Scott affirme, c'est que les opérations sur les fonctions ne sont pas vues comme la création de nouvelles fonctions à partir de celles déjà connues. La chercheuse, ayant en tête le registre graphique comme élément important aux deux ordres, mentionne : « si c'est un mode de représentation parlant, est-il possible de voir graphiquement l'effet de l'opération proposée par Scott dans un graphique » ? Elle tente en ce sens d'établir un premier pont : elle propose en fait de faire les « mélanges » dont parle Scott, dans un mode de représentation important aux deux ordres.

Scott	Moi, définitivement, c'est ce que je vois. Sans aller jusqu'à…[il pointe au tableau, le rectangle de droite], je ne ferais pas du collégial. On a vu des fonctions [fait référence aux différentes fonctions de base] et on essaie de passer au moins une période là-dessus : on essaie de mélanger des fonctions. On a vu quelque chose de nouveau [sous-entendu une nouvelle fonction à l'étude] et on essaie de mélanger dès que c'est

possible. Puis, trouver une façon de présenter à quoi ça ressemble [sous-entendu dans le graphique].

Colette Puis quand on arrive dans le cours NYA [cours de calcul différentiel], ça fait longtemps que je ne l'ai pas enseigné, mais quand on arrive avec des fonctions comme sécante, 1/cos, il y a toute cette histoire de 1/*x* [sous-entendu que les élèves ont vu au secondaire, c'est ce qu'ils voient dans l'expression donnée 1/cos *x*], mais c'est pas 1/*x*, c'est une autre fonction, donc la logique [comment retrouver le graphique de 1/cos en réfléchissant au comportement de 1/*x*] doit être là parce qu'on l'applique, dans le fond.

Chercheuse 1/cos *x*, est-ce que c'est vu au secondaire ?

Scott La définition de cosécante est vue, mais pas la fonction.

Dans ce que dit Scott, on voit apparaître des MFM proches de celles du collégial : « mélanger »[5] des fonctions (travailler avec des fonctions qui ne sont pas juste des fonctions de base) et retracer le comportement (regarder à quoi ça ressemble) graphiquement. L'idée de construire le « mélange » est une idée intéressante pour Scott. Pour Colette aussi qui réagit, laissant apparaître l'intérêt pour le collégial. Elle met en évidence une difficulté des étudiants dans le passage au collégial : voir 1/cos*x* comme 1/*x*.

La chercheuse écrit alors au tableau (figure 2) ce qui ressort en ajoutant « dans le registre graphique » puisque c'est ce qui semble être parlant pour les élèves. Selon Scott, dans les manuels le travail se fait algébriquement, essentiellement. Scott suggère aussi d'ajouter les réciproques des fonctions : « C'est comme une tradition que tout le monde ne remet pas en question, ça va bien ensemble. Au secondaire, on va faire les opérations sur les fonctions, les compositions et les réciproques ». Ce faisant, Scott ouvre les possibilités du secondaire, il reste en quelque sorte sur **le territoire du secondaire (après tout, les opérations sur les fonctions, la composition, les réciproques sont au programme), mais il a maintenant un nouvel horizon, celui du collégial pour voir autrement ce territoire, lui donner un nouveau sens.**

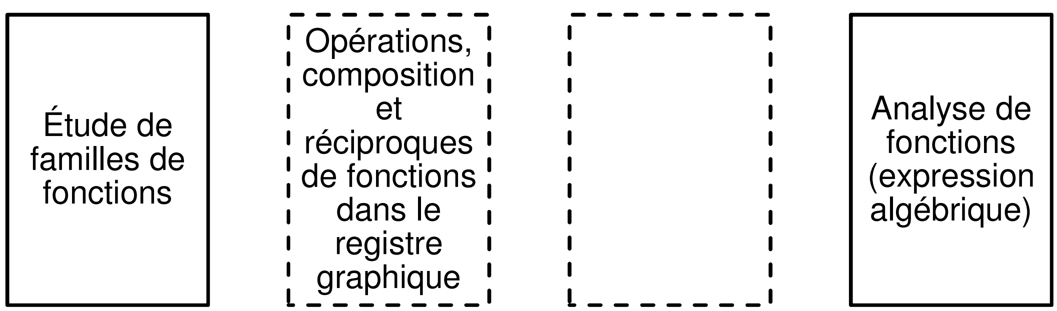

Figure 2 *- Schéma 2 utilisé comme base de réflexion*

La discussion porte ensuite sur le rectangle vide restant, pour le collégial. La discussion tourne autour de l'utilisation des paramètres. On essaie de faire le lien entre le secondaire via les paramètres (écriture canonique d'une fonction) puisqu'ils sont beaucoup utilisés (il en avait d'ailleurs été question à la première séance). Comment les réinvestir ? Cette avenue paraît peu prometteuse dans la mesure où les enseignants du collégial n'en voient pas l'intérêt, comme l'explicite Corinne : « on ne fera pas de retour sur les paramètres, on ne réinvestit pas la partie faite sur les paramètres. On n'en a pas vraiment besoin au collégial ». Ceci met en évidence qu'**il y a recherche de quelque chose de plausible, pertinent pour sa**

[5] Terme introduit par Sandra, du secondaire, à la première séance pour exprimer ce que les enseignants du secondaire font (« toi [au collégial], dans le fond, tu mélanges un paquet de fonctions »).

pratique. On cherche à aller vers l’autre, mais tout en restant cohérent dans son propre territoire.

Colette fait une proposition. Elle propose d’écrire dans le dernier rectangle de droite $\frac{x^3}{1-x^2}$ en mentionnant qu’elle voit une sorte de progression. Elle mentionne qu’au collégial, on pourrait revoir le tracé des fonctions de base avec les paramètres (entendus comme les paramètres tels qu’ils sont utilisés au secondaire), et passer à une fonction où ce n’est plus possible de réfléchir comme au secondaire (avec les paramètres) pour tracer son graphique. La chercheuse écrit la suggestion (voir figure 3, 3^{e} rectangle).

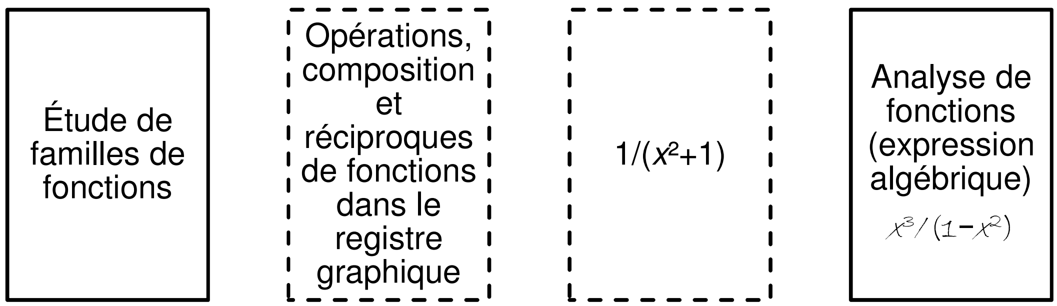

Figure 3 - *Schéma 3 utilisé comme base de réflexion*

Colette amène cette idée en relatant une expérience vécue : « Moi je voyais $1/(x^2+1)$. Je sais qu’en *Calcul intégral*, quand les étudiants m’arrivaient, ils avaient un truc à faire, je ne me rappelle plus exactement quoi, trouver une intégrale… Ils ne savaient pas comment tracer ça. Il y avait tellement d’étudiants qui venaient à mon bureau. Puis là, c’était pas le temps de commencer à prendre la dérivée première et la dérivée seconde. C’était pas ça ! Puis c’était pas non plus une fonction avec les paramètres [comme au secondaire] donc, quelque part, il fallait une intuition… ».

Dans ce que propose Corinne, il y a cette idée d’ébranler la conception que l’étude des paramètres donne accès à toutes les fonctions. Il est intéressant de constater qu’elle fait cette suggestion à la suite du commentaire de Corinne qui mentionne qu’au collégial, on ne réinvestit pas les paramètres. Ainsi, **une façon de passer à autre chose est d’ébranler la conception que l’étude des paramètres donne accès à toutes les fonctions, de mette à l’épreuve cette conception, bref de la problématiser.** Avec l’exemple proposé par Colette ($1/(x^2+1)$, tracer un graphique à l’aide des paramètres (déplacements horizontaux et verticaux, dilatation, contraction) n’est plus possible (par exemple à partir de $1/x^2$). En effet, bien qu’en apparence la fonction ressemble à ce qui pourrait être vu au secondaire, ça ne fait pas partie du territoire du secondaire. Or, Colette mentionne que ça ne relève pas non plus du territoire du collégial. Il s’agit donc, selon elle, d’un « entre-deux ». Comment tracer le graphique de ces fonctions qui ne sont ni du territoire du secondaire, ni de celui du premier cours de calcul au collégial. Un nouveau travail émerge de cette réflexion, celui de **développer une manière différente d’ « analyser » ou de retracer le comportement d’une fonction pour en esquisser le graphique (intuitivement).** On voit par ailleurs que tout le travail fait jusqu’à maintenant s’appuie sur un mode de représentation particulier, le graphique, qui sert de « pont ».

On constate, à cette étape, que chacun vise l’ordre de l’autre dans sa démarche, mais en s’appuyant sur des éléments qui relèvent de son propre ordre : un « mélange » de fonctions (plutôt de l'ordre du collégial) mis en relation avec les opérations sur les fonctions (vues au secondaire) pour l'ordre secondaire; et ébranler le concept de paramètres (plutôt de l'ordre du secondaire) en analysant de nouvelles fonctions autrement qu'avec les outils du calcul, plus intuitivement (retracer le comportement d'une fonction) pour l'ordre collégial. Du point de l'harmonisation, il s'agit en quelque sorte de **rester dans le territoire à un ordre donné, mais un territoire ayant comme horizon le territoire de l'autre ordre, et parfois même d'élargir ce territoire (au collégial).**

En effet, ce que propose Colette fait partie d'un territoire élargi pour le collégial. En ce sens, le schéma proposé oriente en quelque sorte la lecture du « vide » à combler. Développer une intuition pour comprendre le comportement d'une fonction à partir d'une expression algébrique et permettre d'esquisser directement le graphique sans passer par les paramètres (puisqu'ils sont inopérants ici), non plus que par l'attirail d'outils du premier cours de calcul (la dérivée et tout ce qui vient avec), un tel travail avec cet 'attirail' faisant partie des compétences attendues dans le cours de calcul différentiel. De plus, ce que Colette propose d'ajouter dans le dernier rectangle (celui du collégial), l'expression $x^3/(1-x^2)$, est pour elle l'occasion de susciter chez les étudiants un besoin pour la création de nouveaux outils qui permettront de savoir à quoi ressemble le graphique, et même de le tracer de façon relativement fiable. Pour Colette, l'intuition n'est plus suffisante ici.

V. CONCLUSION : QU'APPORTE CETTE RECONSTRUCTION DE LA TRAJECTOIRE D'HARMONISATION ?

La première partie de la trajectoire d'harmonisation visant l'émergence d'idées nouvelles, se développe autour de l'identification de liens (la représentation graphique), la création d'un contraste dans la discussion à propos des MFM autour des fonctions (un vide à combler) et enfin, la construction de ponts. Cette reconstruction fait apparaître un maillage entre les contributions des uns et des autres dans cette tentative d'harmonisation, celles des enseignants, mais celle aussi de la chercheuse. Une certaine conception de l'harmonisation insufflée par le schéma retenu, qui va agir comme ressource structurante dans la manière dont les uns et les autres vont s'engager dans ce travail d'harmonisation; des éléments de transition ramenés dans la construction (le travail dans le registre graphique pour par exemple les opérations sur les fonctions; le travail sur le tableau de valeurs et de variation). La chercheuse identifie des problèmes liés à la transition, identifie un vide que les enseignants des deux ordres, avec leurs idées et leur expertise respective, aident à combler. Les enseignants constituent les liens en revisitant leur territoire avec comme nouvel horizon le territoire de l'autre.

REFERENCES

Artigue M. (2004) *Le défi de la transition secondaire/supérieur : Que peuvent nous apporter les recherches didactiques et les innovations développées dans ce domaine.* Texte de la communication présentée au 1er Congrès Canada-France des sciences mathématiques, Toulouse.

Bednarz N. avec la collaboration de Auclair M., Barrette M.A., Lafontaine J., Péloquin M.È., Rodrigue I., Leroux C., Morelli C. (2008) Une expérience de collaboration enrichissante en enseignement des mathématiques. *Vie pédagogique* 147, 43-51.

Bednarz N. (2013) *Recherche collaborative et pratique enseignante: regarder ensemble autrement.* Paris : L'Harmattan.

Bloch I. (2000) *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée / université : savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation*. Thèse de doctorat inédite. Université Victor Segalen, Bordeaux 2, France.

Bosch M., Fonseca C., Gascon J. (2004) Incompletud de las organizaciones atematicas locales en las instituciones escolares. *Recherches en didactique des mathématiques* 24(2-3), 205-250.

Bosch M., Chevallard Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs: objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(1), 77-123.

Chenard É., Francoeur, Doray P. (2007) Les transitions scolaires dans l'enseignement postsecondaire : normes et impacts sur les carrières étudiantes. *Notes de recherche du CIRST*. http://www.cirst.uqam.ca/Portals/0/docs/note_rech/2007_04.pdf

Corriveau C. (2013) Des manières de faire des mathématiques comme enseignants abordées dans une perspective ethno-méthodologique pour explorer la transition secondaire collégial. Thèse de doctorat inédite. Québec : Université du Québec à Montréal.

Corriveau C. (2007) *Arrimage secondaire-collégial : démonstration et formalisme*. Mémoire de maîtrise inédit. Montréal : Université du Québec à Montréal.

Corriveau C., Tanguay D. (2007) Formalisme accru du secondaire au collégial : les cours d'Algèbre linéaire comme indicateurs. *Bulletin AMQ* XLVII(1), 6-25.

Corriveau C., Bednarz N. (2013) Manières de faire des mathématiques comme enseignants : une perspective ethnométhodologique. *For the Learning of Mathematics* 33(2), 24-30.

Coulon A. (1993) *Ethnométhodologie et éducation*. Paris: Presses universitaires de France.

Desgagné S. (2001) La recherche collaborative : une nouvelle dynamique de recherche en éducation. In Anadón M. (Ed.) *Nouvelles dynamiques de recherche en éducation* (pp. 51-76). Québec : Les presses de l'université Laval.

Edwards B. E., Dubinsky E., Mc Donald M. A. (2005) Advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 15–25.

Garfinkel H. (1967) *Studies in Ethnomethodology*. New Jersey : Prentice-Hall. [Trad. Barthélemy M., Beaudoin D., de Queiroz J.-M., Quéré L. (2007) *Recherches en ethnométodologie*. Paris : Presses Universitaires de France].

Gueudet G. (2004) Rôle du géométrique dans l'enseignement de l'algèbre linéaire *Recherchen en didactique des mathématiques* 24(1), 81-114.

Hall E. T. (1959) *Le langage silencieux* [traduction 1984]. Paris: Seuil, Points.

Harel G., Tall D. (1991) The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the learning of mathematics* 11(1), 38-42.

Luk H. S. (2005) The gap between secondary school and university mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 36(2-3), 161-174.

Najar R. (2011) Notions ensemblistes et besoins d'apprentissage dans la transition secondaire-supérieur. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education* 11(2), 107-128.

Praslon F. (2000) *Continuités et ruptures dans la transition Terminale S / DEUG Sciences en analyse : Le cas de la notion de dérivée et son environnement*. Thèse de doctorat inédite. Paris : Université Paris 7.

Robert A. (2003) Un point de vue sur les spécificités du travail géométrique des élèves à partir de la quatrième: l'organisation des connaissances en niveaux de conceptualisation. *Petit x* 63, 7-29.

Robert A. (1998) Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques* 21(1-2), 57-80.

Tall D. (1992) The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof. In G. D.A. (Ed.) *Handbook of Research on MathematicsTeaching and Learning* (pp. 495–511). New York : Macmillan.

Tall D. (1995) *Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking.* Paper presented at the Conference of the International Group for the Psychology of Learning Mathematics, Recife, Brazil.

Tinto V. (1993) *Leaving college: Rethinking the Causes and Curses of Students Attrition*. Chicago & London: Chicago University Press.

Vandebrouck F. (2011*b*) Students conceptions of functions at the transition between secondary school and university. In Pytlak M., Rowland T., Swoboda E. (Eds.) *Proceedings of CERME 7* (pp. 2093-2102). Rzesvow, Pologne : University of Rzesvow.

Vandebrouck F. (2011*a*) Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. *Annales de didactique et de sciences cognitives* 16, 149-185.

Winsløw C. (2007) Les problèmes de transition dans l'enseignement de l'analyse et la complémentarité des approches diverses de la didactique. *Annales de didactique et de sciences cognitives* 12, 195-215.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

PENSER LA QUESTION DES CONTENUS A LA TRANSITION SECONDAIRE-SUPERIEUR AU SEIN DU RESEAU DES IREM EN FRANCE

Patrick FRETIGNE[*] – Geneviève BOUVART[**] - Viviane DURAND-GUERIER[***] – Zoé MESNIL[****] - Fabrice VANDEBROUCK[*****] - Martine VERGNAC[******]

Résumé – En 2013, trois Commissions Inter IREM se sont associées pour organiser un colloque sur la transition secondaire-supérieur et plus particulièrement sur la réforme des programmes scientifiques du lycée, en mathématiques et en physique, qui venait d'entrer en vigueur en France. Nous présentons dans ce texte une réflexion issue de deux des ateliers. Le premier concerne les nombres réels qui ont disparu des programmes, tandis que le second s'intéresse aux possibilités offertes par le retour explicite de la logique. Un large consensus s'est dégagé à l'issue du colloque pour estimer que les nouveaux programmes rendent plus difficile la transition entre secondaire/supérieur.

Mots-clefs : Transition secondaire – supérieur ; réseau des IREM ; réforme des programmes ; nombres réels ; logique.

Abstract – In 2013, three Inter IREM national commissions joined to organize a conference on the transition between secondary and university mathematics, focusing on the recent reform of the secondary programs, in mathematics and in physics, in France. We present in this text a reflection stemming from two of the workshops. The first one concerns real numbers, which disappeared from French programs, whereas the second focus on the possibility opened by the explicit come back of logic. A wide consensus emerged at the end of the colloquium to consider that the new programs make more difficult the transition between secondary and university mathematics.

Keywords: Transition secondary/university mathematics; programs reform; real numbers; logic.

I. INTRODUCTION GENERALE

Les IREM (Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) sont des structures universitaires où peuvent travailler ensemble, sur des contenus mathématiques ciblés, des

[*] Commission Inter-IREM Université, IREM de Rouen – France – pf@univ-rouen.fr
[**] Lycée Bichat à Lunéville, IREM de Lorraine – France
[***] Université de Montpellier, I3M UMR 5149, IREM de Montpellier – France – vdurandg@univ-montp2.fr
[****] Université Paris Diderot, Laboratoire de Didactique André Revuz, IREM de Paris – France – zoe.mesnil@univ-paris-diderot.fr
[*****] Université Paris Diderot, Laboratoire de Didactique André Revuz, IREM de Paris – France – vandebro@univ-paris-diderot.fr
[******] Lycée Jean Lurçat, Perpignan, IREM de Montpellier – France – martine.vergnac@wanadoo.fr

Frétigné P., Bouvart G., Durand-Guerrier V., Mesnil Z., Vandebrouck F., Vergnac M. (2015) Penser la question des contenus à la transition secondaire supérieur au sein du réseau des IREM en France. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – Spé3, pp. 994-1004.

enseignants du primaire, du secondaire, du supérieur mais aussi des formateurs d'enseignants et parfois des inspecteurs. Ils sont en France des acteurs majeurs, pour les mathématiques, de la recherche en éducation, de la formation initiale et continue des enseignants, en partenariat avec les Ecoles Supérieures du Professorat et de l'Education (ESPE), les départements disciplinaires et les laboratoires de recherche dont ils sont proches dans les universités.

Les IREM forment un réseau d'environ un millier d'enseignants et chercheurs en mathématiques, histoire et didactique des mathématiques. Ils se répartissent dans toute la France : 28 IREM (c'est-à-dire, à deux exceptions près, un IREM par académie). Leurs travaux portent sur tous les niveaux du système éducatif, du premier degré à l'université. Ils sont constitués en réseau national, structuré autour de l'assemblée des directeurs (ADIREM) avec un comité scientifique (CS), des commissions inter IREM (C2I, treize), et avec des publications et rencontres nationales. Les IREM organisent en particulier annuellement les colloques importants en France de la COPIRELEM (Commission Permanente des IREM sur l'Enseignement Elémentaire) et de la CORFEM (Commission de Recherche sur la Formation et l'Enseignement des Mathématiques du second degré) qui sont des points de rencontres pour les formateurs en mathématiques des ESPE. Les revues éditées par le réseau des IREM (Petit *x*, Grand N, Repères IREM) sont aussi des ressources importantes pour la formation initiale et continue des enseignants.

La recherche développée dans les groupes IREM est une recherche appliquée – ou recherche action – qui suit un protocole scientifique strict : travail mathématique, épistémologique et didactique (bibliographie, élaboration de séquences…) en appui sur la recherche fondamentale en didactique des mathématiques, expérimentations en classe par les enseignants de terrain, analyse de ces expériences au sein des groupes, rédaction et publication de documents, alimentation de formations initiales, mise en œuvre de stages de formation continue, participation aux commissions inter IREM nationales. Á travers leurs publications, leurs actions de formations initiales et continues, les actions de diffusion scientifique ou les rencontres organisées au sein du réseau, ce sont au moins dix mille enseignants de mathématiques de tous statuts qui sont en contact avec les IREM chaque année.

En 2013, trois C2I se sont associées pour organiser un colloque sur la transition lycée-post baccalauréat et plus particulièrement sur la réforme des programmes scientifiques du lycée, en mathématiques et en physique, qui venait d'entrer en vigueur en France.[1] Il s'agissait d'aider les nouveaux collègues. A la suite d'une réflexion menée à la CIIU[2], dont l'un des thèmes récurrents est celui de la transition secondaire-supérieur, nous étions conscients que ce n'était pas juste « une réforme de plus » et que celle-ci allait modifier profondément la façon d'enseigner les mathématiques et la physique au lycée et les savoirs et savoir-faire sur lesquels les enseignants du supérieur allaient pouvoir s'appuyer.

Lorsque ce colloque s'est tenu, les 24 et 25 mai 2013, nous n'avions pas encore beaucoup de recul sur l'impact de la réforme puisque c'était à la fin de la première année où nous accueillions à l'université, dans les IUT et les CPGE, les élèves l'ayant vécue au lycée, mais devant l'importance de cette réforme et de son impact prévisible, la CIIU (Commission Inter-IREM « Universités ») a décidé de ne pas attendre davantage : l'un de nos objectifs était de profiter des premières expériences et réflexions dont disposaient les enseignants du lycée pour les présenter à leurs collègues du supérieur et les aider à identifier les pertes et les nouveautés dans les programmes de terminale en mathématiques et en physique et leurs conséquences

[1] Le colloque a donné lieu à des actes publiés par l'IREM de Paris 7 (IREM de Paris 7 2013)

[2] Commission Inter IREM Université qui réuni des formateurs de plusieurs IREMs autour des questions de transition lycée – Université et d'enseignement supérieur.

probables sur les connaissances des étudiants entrant dans le supérieur. Nous souhaitions également mettre en commun les expériences s'appuyant sur ces nouveaux programmes pour aider les collègues du secondaire à y repérer les opportunités qui s'y trouvent.

Grâce à la richesse structurelle du réseau des IREM, nous avons pu former un comité organisateur parfaitement en adéquation avec le thème en associant la CIIU à deux autres Commissions Inter-IREM : la CII – Lycée et la CII probabilités-statistique, dont la participation s'imposait par l'augmentation substantielle de ces disciplines dans les programmes de Première et de terminale.

Les 3 conférences et les 12 ateliers étaient tous des exposés à « deux-têtes » : co-animés par soit un enseignant de mathématiques et de physique, soit un enseignant du secondaire et un enseignant du supérieur. Nous présentons dans ce qui suit deux exemples parmi les ateliers proposés dont les comptes rendus se trouvent dans les actes du colloque. Le premier exemple concerne les nombres qui ne sont plus objet d'étude dans les programmes actuels de lycée en France et met en évidence la fragilité des connaissances des élèves de lycée et de début d'université. Le second exemple concerne la logique qui a fait en 2009 un retour explicite dans les programmes de lycée, programme pour lequel de nombreux enseignants se sentent démunis.

II. LES REELS A LA TRANSITION SECONDAIRE - SUPERIEUR[3]

1. Introduction

De par les relations étroites entretenues entre la construction des nombres réels et les fondements de l'analyse, on peut faire l'hypothèse qu'une appropriation adéquate du concept de nombre réel est nécessaire pour une bonne compréhension de l'analyse enseignée dans les cursus universitaires mathématiques. En particulier, la distinction essentielle entre la propriété de densité, satisfaite par Q, D et R et la propriété de continuité non satisfaite par Q et D et qui caractérise R est au cœur de la construction des réels et de la notion de convergence. En France, au collège, les élèves sont principalement sensibilisés à la nécessité de considérer des nombres irrationnels sur quelques exemples emblématiques ($\sqrt{2}$, π), et éventuellement à l'existence d'écritures décimales illimitées pour les rationnels non décimaux. Jusqu'en 2009, en France un chapitre sur les ensembles de nombres en seconde, et un chapitre sur la convergence des suites adjacentes en terminale S permettaient d'aborder ces aspects. Suite à leur disparition des nouveaux programmes, le travail sur ces questions tend à disparaître comme le montrent les entretiens conduits en 2013 auprès d'enseignants de Lycée en France. Or la fréquentation de ces nombres tout au long du cursus secondaire ne suffit pas à elle seule à permettre aux élèves une telle appropriation : les résultats de questionnaires proposés à des élèves de lycée et à des étudiants de licence montrent que la plupart d'entre eux ne développent pas des conceptions adéquates pour une poursuite d'étude dans le domaine de l'analyse.

2. Conceptions d'élèves de seconde à propos des nombres réels

Nous nous sommes attachées au travers d'une étude de cas menée dans l'académie de Montpellier en 2012/2013 à tenter de cerner quelles sont les connaissances des élèves de lycée à propos des nombres réels. Dans cette étude, nous avons testé l'hypothèse selon laquelle les connaissances des élèves sur les nombres réels ne sont pas stabilisées à l'entrée à l'université.

[3] Ce paragraphe est un résumé étendu de Vergnac et Durand-Guerrier (2013)

Nous avons tout d'abord conduit sept entretiens des enseignants de lycée en France ; nous avons ensuite posé un questionnaire dans les huit classes de seconde de ceux-ci. Parmi les points abordés dans les entretiens, nous avons cherché à savoir si la disparition dans les nouveaux programmes du chapitre sur les ensembles de nombres avait modifié leurs pratiques et dans l'affirmative de quelle façon se traduisait cette modification. Pour la quasi-totalité[4] des enseignants interrogés, cela avait pour conséquence un moindre travail sur les nombres et en particulier aucun travail sur l'irrationalité des nombres. Pour tous les enseignants interrogés, à l'entrée en seconde les élèves ne distinguent que deux types de nombres : les entiers et les « autres ». L'usage de la calculatrice amène selon eux les élèves arrivant en lycée à identifier un nombre à son affichage à la calculatrice. L'analyse des questionnaires posés dans les classes de seconde montre que les réponses apportées par les élèves correspondent pour une grande part aux perceptions de leurs enseignants. Pour les élèves de seconde interrogés, la nature des nombres qu'ils rencontrent et/ou utilisent, est liée à l'écriture de ceux-ci. Par exemple, pour plus de deux tiers des élèves interrogés, 5/3 n'est pas un nombre rationnel mais un nombre décimal et seulement la moitié des élèves interrogés, considèrent explicitement que $\sqrt{7}$ est un nombre. Parmi eux, un tiers se le représente comme un décimal, et une moitié ne se le représente pas. Pour ces élèves, les nombres ont toujours une écriture décimale et il y a identification du nombre avec son écriture décimale. Une fraction est un nombre décimal car on peut l'écrire à l'aide d'un nombre « à virgule ». Les racines carrées ne sont pas des nombres pour la moitié des élèves interrogées : ce sont des fonctions ou des opérateurs. Elles ne deviennent des nombres pour une partie de ces élèves que lorsqu'ils en proposent une écriture décimale à l'aide de la calculatrice. La question : « *Comment peux-tu définir un nombre réel?* », est de manière évidente une question très difficile pour un élève de seconde, et à laquelle il ne peut apporter aucune réponse qui soit une définition formelle, mais nous attendions que conformément aux pratiques de classe décrites par les enseignants interviewés, un certain nombre d'entre eux identifient l'ensemble des nombres réels à une droite représentant l'axe réel. Or cette réponse n'a été proposée par aucun des 252 élèves interrogés ; dans un certain nombre de cas, l'ensemble des nombres réels a été défini comme étant l'intervalle$]-\infty;+\infty[$ mais cela ne signifie pas que cet intervalle soit identifié par ces élèves à l'axe réel. Aucune de ces réponses n'était accompagnée d'une figure de droite ; l'intervalle]-∞ ; +∞[est un symbole qui n'est associé à aucune représentation.

3. *Evolutions de la seconde à la terminale scientifique et en licence*

Afin d'observer s'il y a une évolution des conceptions à propos du nombre réel de la seconde à la terminale S, nous avons soumis en 2012-2013 à deux classes de terminale S un questionnaire[5], qui a également été proposé en 2012-2013 à quelques étudiants de Licence 1, 2 et 3, puis en 2013-2014 à un nombre plus important d'étudiants de Licence 1 au début du second semestre[6]. Les deux classes de terminale S étaient toutes les deux considérées comme des classes d'assez bon niveau et comportaient respectivement 24 et 32 élèves. Même si l'échantillon observé est moindre que pour les élèves de seconde, il permet de dégager un paysage des conceptions sur les nombres à l'entrée de l'université. Nous avons proposé une classification plus fine qu'en seconde afin de comparer les réponses des élèves de terminale S

[4] 6 enseignants sur 7, le septième étant un enseignant dont c'est la première année d'enseignement
[5] Repris de Bronner (1997)
[6] Nous insérons dans ce texte les résultats obtenus qui sont présentés dans Verganc et Durand-Guerrier (2014)

et des étudiants de licence[7] : nous avons identifié dix conceptions indiquées dans le tableau récapitulatif ci-dessous :

Catégorie	TS en 2012-2013	L en 2012-2013	L1 en 2013-2014
1. Conception « Ensemble de tous les nombres (sauf les nombres complexes) »	13%	12,5%	8,5% + (16%)
2. Conception « Vision géométrique – axe réel »	7%		1,5%
3. Conception « Intervalle]-∞ ; +∞[»	11%	8%	14,5%
4. Conception « Complexes non imaginaires »	14,5%	6%	4%
5. Conception « Réaliste »	7%	0%	4%
6. Conception « Ecriture décimale illimitée »	0%	14,5%	2,5%
7. Conception « Partition Q ou I »	4%	14,5%	5%
8. Conception « Partition incorrecte »	14,5%	14,5%	22%
9. Reformulation	13%	10,5%	18%
10. Autres	13%	20%	13%
11. Non réponses	16%	4%	5%

***Tableau 1**- classification des réponses et pourcentages obtenus en TS et en Licence*

Dans la classification opérée en seconde, les conceptions 1 et 3 étaient regroupées. Nous avons pu observer que la conception *« intervalle »* reste solidement ancrée probablement parce qu'elle est la seule à être travaillée explicitement de la seconde à la terminale, en particulier dans la résolution d'inéquations. On peut noter des évolutions significatives par rapport à la seconde. Il y a beaucoup moins de non réponses : cela semble signifier que les élèves de terminale S expriment plus aisément leurs conceptions d'un nombre réel, en particulier les élèves ayant choisi la spécialité mathématique. Les conceptions « *Ensemble de tous les nombres* » et « *réaliste* » prévalent moins qu'en seconde même si on peut encore observer des réponses telles que : « *Un nombre pur* » ou « *Un nombre qui existe, que l'on peut toucher* ». De nouvelles conceptions émergent : « *Complexes non imaginaires* » ainsi que « *Vision géométrique* ». On peut penser que la manipulation des graphiques en analyse favorise la construction de cette conception. En outre il nous paraît important de signaler que les quelques élèves ayant exprimé des conceptions correctes des nombres réels sont tous des élèves ayant choisi la spécialité mathématiques, qui ont donc travaillé davantage que les autres sur les nombres dans la partie arithmétique du programme. Quand on compare les réponses des élèves de lycée à celles des étudiants de licence, on voit apparaître une nouvelle conception liée aux cours dispensés à l'université qui est celle liée à l'écriture décimale illimitée. Mais nous pouvons noter que beaucoup de conceptions observées au lycée restent présentes et pour les conceptions « *Ensemble de tous les nombres* » et « *Partition incorrecte* » quasiment dans les mêmes proportions. Même en ayant travaillé les limites et la continuité de manière formelle, des conceptions erronées sur les nombres réels subsistent jusqu'en troisième année de licence.

[7] Le questionnaire a été proposé à un petit nombre d'étudiant en avril 2013 (14 en L1 ; 11 en L2 ; 13 en L3) ; les résultats ne sont donc pas significatifs ; ils sont donnés à titre indicatif.

4. *Conclusion*

Les résultats de notre étude, bien que celle-ci soit limitée, montrent que les connaissances des élèves sur les nombres sont essentiellement opératoires et ne leur permettent pas d'accéder au concept de nombre réel lui-même. Nous faisons l'hypothèse que ceci est un obstacle pour l'appropriation aux concepts de l'analyse, comme peuvent l'observer les enseignants en début d'université. Dans leurs travaux de recherche Bloch et Ghedamsi (2005) ont mis en évidence des raisons liées aux différences entre le travail en analyse dans le secondaire et dans le supérieur. Au moment de la transition lycée - post bac, on passe d'un travail de type algébrique en analyse, reposant sur une approche intuitive du continu (*les nombres réels sont tous les nombres qu'on connaît*) à un point de vue théorique (*axiomatique*) sans prise en compte explicite des changements conceptuels que cela représente. On peut également supposer que la fragilité des connaissances sur les liens entre aspects pratiques et aspects théoriques en analyse aura des effets sur l'application des outils de l'analyse à d'autres domaines, et pourra mettre en difficultés les futurs enseignants.

III. UN "RETOUR" DE LA LOGIQUE DANS LES PROGRAMMES DU LYCEE : UNE OCCASION À NE PAS MANQUER ![8]

1. *Introduction*

Les nouveaux programmes pour le lycée comportent des objectifs explicites concernant certaines notions de logique. Dans le supérieur, la maîtrise des éléments du langage mathématique, notamment des quantificateurs, est un élément essentiel pour pouvoir comprendre définitions et théorèmes qui sont rédigés dans un langage plus formel qu'au lycée. Les démonstrations se complexifient, portent sur des objets plus abstraits et cela représente une réelle difficulté pour les étudiants. Plusieurs universités proposent au début de leur cursus mathématique un cours de "méthodologie" consacré à la démonstration et au langage mathématique, afin que les étudiants puissent non seulement acquérir des pratiques, mais également réfléchir sur ces pratiques en mobilisant des outils, notamment logiques, qui pourront être réinvestis. Nous gageons que malgré les imperfections des nouveaux programmes de lycée quant aux notions de logique, notamment le manque de précisions sur les connaissances en jeu, malgré d'éventuelles difficultés pour les professeurs liées au manque de formation et de ressources, dont nous trouvons trace dans les propositions des manuels, ce retour d'un accent sur les questions de logique et de raisonnement ouvre la porte à un apprentissage spécifique qui peut être bénéfique pour la transition lycée/supérieur.

2. *Un aperçu de la réaction des enseignants du secondaire au nouveau programme*

La logique était explicitement objet d'enseignement dans les programmes de mathématiques du lycée pendant la période des mathématiques modernes (entre 1969 et 1981), puis était explicitement exclue des programmes entre 1981 et 2001, date à laquelle elle a fait un timide retour, plus prononcé dans les récents programmes. Ces allers-retours ont pour première conséquence que nous manquons aujourd'hui de recul et d'expérimentations en ce qui concerne l'enseignement de notions de logique au lycée. Par ailleurs, les professeurs actuels ont reçu des formations différentes selon l'époque à laquelle ils ont été élèves et selon leur cursus dans le supérieur (la logique mathématique ne fait pas partie de la formation initiale des enseignants du secondaire, certains n'en ont jamais entendu parler, d'autres ont suivi certains modules spécifiques).

[8] Ce paragraphe est un résumé étendu de Bouvart et al. (2013)

Nous pouvons alors faire l'hypothèse que les pratiques d'enseignement de notions de logique des enseignants du secondaire seront assez diversifiées. Nous avons voulu en savoir plus sur ce point en proposant un questionnaire. D'autre part, la logique étant partie intégrante de l'activité mathématique, est-ce que les enseignants n'intégraient pas déjà un travail sur l'expression et le raisonnement mathématiques dans les activités proposées aux élèves ? Nous avons donc voulu également évaluer l'impact des nouvelles préconisations institutionnelles.

Sur 45 enseignants du second degré interrogés, on constate une très légère accentuation de la pratique de l'apprentissage de la logique. On distingue trois « attitudes » d'enseignants par rapport à l'enseignement de la logique au lycée :

- Ceux qui ressentent le besoin d'un cours de logique *a priori* et qui le font contre vents et marées.
- Ceux qui respectent « l'esprit du programme » en établissant les principes au fur et à mesure des situations étudiées.
- Ceux qui trouvent que cela se fait naturellement et qui n'éprouvent pas le besoin d'expliciter davantage les notions de logique.

Pour les travaux réalisés avec les élèves, la préférence est donnée aux exercices des manuels mais les 2/3 des professeurs ayant répondu au questionnaire donnent très peu d'exercices étiquetés logique[9] et encore moins de situations de recherche permettant de travailler la logique. La logique est loin d'être une priorité.

3. *La nécessité d'une formation : l'exemple du traitement de l'implication dans les manuels de Seconde*

Une écrasante majorité de professeurs pensent que la logique doit être enseignée lors de la formation des professeurs. Ils confirment ainsi que le fait qu'ils sachent utiliser des notions de logique dans leur propre activité mathématique n'est pas suffisant pour les enseigner, même si ce qui leur est demandé dans le programme concerne uniquement l'aspect outil de ces notions. Or, dans le contexte actuel, la logique mathématique n'apparaît pas comme une théorie de référence pour l'enseignement de ces notions, rôle qu'elle pourrait pourtant pertinemment jouer en articulant ce qu'elle dit de ces notions en tant qu'objets avec leur utilisation dans l'activité mathématique. D'où la présence d'un discours imprécis dans les manuels, que nous allons illustrer à travers l'exemple de l'implication.

Dans les manuels, une implication est une phrase[10] de la forme "si… alors…". En mathématiques, ces propositions comportent presque systématiquement une quantification universelle implicite[11]. Ce ne sont donc pas des propositions de la forme $A \Rightarrow B$, mais des propositions de la forme $\forall x \quad A[x] \Rightarrow B[x]$. La présence d'une variable et d'un quantificateur universel est essentielle. On ne peut que les expliciter pour justifier qu'il suffit d'UN contre-exemple pour montrer qu'une proposition en "si … alors …" est fausse, justification qui s'appuie sur deux propriétés : la négation de $A \Rightarrow B$ est $A \; ET \; NON(B)$, et celle de $\forall x \quad P[x]$ est $\exists x \quad NON(P)[x]$. Une telle justification n'apparaît pas dans les manuels : le contre-exemple est donné comme une technique isolée, non reliée à des connaissances logiques qui pourraient être réinvesties ailleurs. Sans être une erreur, cette absence de propos

[9] On trouve dans presque tous les manuels publiés suite aux nouveaux programmes des exercices repérés par un logo "Logique".
[10] Quelques manuels parlent de *proposition*, mais ce terme n'est pas très utilisé.
[11] Qui n'est pas toujours repérée par les élèves.

sur les variables en général, et notamment par rapport à l'implication, nous parait être un manque bien dommageable.

Mais peut-être plus grave, il y a dans plusieurs manuels une confusion entre "si… alors…" et "donc" qui pour le coup relève d'une méconnaissance de ces objets. Une phrase de la forme "si *A* alors *B*" est une proposition mathématique, ce qui n'est pas le cas d'une phrase de la forme "*A* donc *B*". Dire "*A* donc *B*" c'est dire 3 choses : que A est vraie, que B est vraie, et que j'ai de bonnes raisons de penser qu'il y a un lien entre ces deux informations, la plupart du temps le fait que je sais que "si *A* alors *B*" est vraie. Je ne peux pas m'interroger sur la vérité d'une telle phrase, mais seulement sur la validité de l'inférence qu'elle sous entend.

4. *Dans le supérieur : exemple du cours Langage Mathématique*

Dans le supérieur, plusieurs enseignants, notamment en classe préparatoire, font en début d'année un petit topo sur les notions de logique classiques : connecteurs, quantificateurs, types de raisonnement. Il se présente la plupart du temps de manière plus formelle que ce qui est proposé dans les nouveaux manuels pour le lycée (on y trouve par exemple souvent les tables de vérité des connecteurs).

À l'Université Paris Diderot, de 2009 à 2014, un cours Langage Mathématique[12] a été proposé au premier semestre des filières math, math-info et info. Les étudiants y apprennent ce qu'est une *expression mathématique* (assemblage de signes obéissant à certaines règles et à certaines conventions ; les expressions mathématiques sont divisées en deux catégories : celle des noms d'objets mathématiques, et celle des propositions qui affirment des faits concernant ces objets). Dans ces expressions, une attention particulière est accordée au statut des variables : *muette* comme dans l'expression $\int_0^1 x\,dx$ qui "ne parle pas de *x*", ou *parlante*[13] comme dans l'expression $x^2 \geq 1$, qui "parle de *x*". Ces notions pourraient bien sûr être introduites dès le lycée[14]. Les étudiants voient ensuite définitions et premières propriétés des connecteurs et des quantificateurs. Une attention particulière est portée sur les multiples façons de dire la quantification en mathématiques, et les étudiants sont entraînés à exhiber les quantifications dans les propositions. Des liens sont faits entre structure logique d'une proposition et structure de sa preuve. Ce cours n'est pas un cours de logique mathématique : les définitions et propriétés sont données non pas pour un traitement formel, mais pour être illustrées par une utilisation dans des contextes particuliers. Par exemple, différentes formulations de la propriété "Toute fonction réelle périodique qui admet une limite en +∞ est constante" sont reliées à différentes propositions équivalentes à $(A \text{ ET } B) \Rightarrow C$. Ce travail semble aider les bons étudiants à avoir une attitude réflexive sur ce qu'ils écrivent, mais semble trop loin des étudiants les plus faibles. Une difficulté pour tous les étudiants est que le contrôle qu'ils sont invités à exercer dans ce cours est bien vite oublié.

5. *Un exemple d'articulation entre travail mathématique et travail sur des notions de logique*

L'exercice qui a été présenté dans l'atelier avait été proposé dans une classe de terminale S en 2013. Dans cette classe, un théorème-élève erroné a surgi à la suite d'une analogie abusive entre « l'intégrale conserve l'ordre » et « la dérivée conserve l'ordre ». L'exercice permet

[12] http://didel.script.univ-paris-diderot.fr/claroline/course/index.php?cid=LM1
[13] On dit aussi libre/liée
[14] La notion de variable muette est présente à propos de la variable d'intégration, mais n'est pas utilisée dans d'autres cas, comme par exemple dans l'expression $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

d'infirmer cette proposition, et de travailler sur les connecteurs et les quantificateurs. Pour ne pas ajouter aux difficultés de compréhension des notions d'analyse celles de compréhension de logique, l'exercice est bâti à partir de l'herbier des fonctions usuelles de terminale S. Les fonctions à étudier ont été données pour gagner du temps, pour revisiter les fonctions incontournables de TS[15] et pour l'exhaustivité des cas à analyser.

Voici le texte de l'exercice :

Exercice 1 :

1. Dans chacun des cas comparer, sur l'intervalle donné, les fonctions f et g puis les fonctions f' et g'.

I	$f(x)$	$g(x)$	Comparer f et g sur I	Comparer f' et g' sur I
$\mathbb{R}$	e^x	e^{x+1}		
$\mathbb{R}$	x	e^x		
$]0;+\infty[$	$ln(x)$	x		
$\mathbb{R}$	x^2	x^2+2x		

2. **Vrai ou faux ?**
Pour chacune des propositions suivantes dire si elle est vraie ou fausse en justifiant les réponses.
Proposition 1 : "Il existe un réel a de I tel que $f(a) \leqslant g(a)$ et $f'(a) \leqslant g'(a)$."
Proposition 2 : "Il existe un réel a de I tel que $f(a) \leqslant g(a)$ et $f'(a) > g'(a)$."
Proposition 3 : "Pour tout réel x de I, $(f(x) \leqslant g(x) \Longrightarrow f'(x) \leqslant g'(x))$."
Proposition 4 : "(Pour tout réel x de I, $f(x) \leqslant g(x)) \Longrightarrow$ (Pour tout réel x de I , $f'(x) \leqslant g'(x))$"

Résumer les réponses obtenues en complétant le tableau ci-dessous par **V** si la proposition est vraie et **F** si la proposition est fausse.

I	$f(x)$	$g(x)$	$f \leqslant g$	$f' \leqslant g'$	Prop 1	Prop 2	Prop 3	Prop 4
$\mathbb{R}$	e^x	e^{x+1}	**V**	...	...	...	...	...
$\mathbb{R}$	x	e^x	...	...	...	...	...	...
$]0;+\infty[$	$ln(x)$	x	...	...	...	...	...	...
$\mathbb{R}$	x^2	x^2+2x	...	...	...	...	...	...

3. Proposer un intervalle I sur lequel la proposition 3 est vraie.

Figure 1*- Exercice proposé en TS*

Lors d'une première séquence, les élèves ont cherché individuellement à répondre à la première question, qui a ensuite été corrigée collectivement avant de passer à la suite. L'objectif de la deuxième partie du travail était d'établir d'éventuels liens logiques entre les propositions énoncées. Les élèves devaient d'abord compléter seuls le tableau de la question 2 mais la plupart ne comprenait pas la différence entre les propositions 3 et 4. En visualisant les représentations graphiques des fonctions f, g, f' et g', les réponses pour les propositions 1, 2 et 3 ont été explicitées collectivement. Pour les propositions 1 et 2, il était facile d'exhiber un bon candidat ou de montrer que l'on ne pouvait pas en trouver. Lors du débat pour justifier la valeur de vérité de la proposition 3 du deuxième exemple, les élèves ont cherché à écrire la

[15] Proposé en début de première année d'université, un tel exercice pourrait permettre un rapide retour sur ces fonctions et leurs propriétés.

négation de la proposition 3 et certains ont remarqué que la proposition 2 était la négation de la 3. A partir de là, la proposition 3 n'a plus posé de problème. La proposition 3 a été écrite sous la forme : « Pour tout $x, P[x] \Longrightarrow Q[x]$ ». Puis sa négation sous la forme : « Il existe x tel que $P[x]$ et non $Q[x]$. » La proposition 4 ne prenant pas de sens pour les élèves, ils ont écrit sa négation par analogie avec le travail réalisé précédemment. Ils ont alors complété la dernière colonne. Pour le dernier exemple une utilisation de la négation s'est révélée nécessaire. En fin de séance, les élèves ont été invités à refaire le même travail pour deux fonctions, choisies de façon à ce que les valeurs de vérité des propositions 3 et 4 soient différentes, en argumentant par écrit leurs réponses. Le taux de réponses exactes pour les trois premières propositions était proche de 80%. Il n'atteignait que 50% pour la proposition 4.

6. Conclusion

Les discussions lors de l'atelier ont surtout porté sur l'intégration au lycée des notions de logiques à d'autres activités : comment faire pour qu'elle ne semble pas "factice" ? Quelle proportion d'un travail "technique" ? Notre parti dans les activités que nous avons présenté est de provoquer un travail spécifique, tout en contextualisant les propositions étudiées pour que d'autres notions du programme soient abordées. Les questions portant spécifiquement sur des notions de logique peuvent alors paraître un peu artificielles, mais l'expérience montre que les élèves s'y intéressent. Les éléments du langage mathématique et les types de raisonnement sont souvent abordés au début des études mathématiques dans le supérieur de façon plus décontextualisée et avec un point de vue plus clairement assumé comme étant celui de la logique mathématique, même s'il n'est pas question de faire un cours formel. Plusieurs enseignants du supérieur présents dans l'atelier ont confirmé que le travail possible au lycée, dont nous avons donné des exemples, était un atout permettant que ce discours, bien que se situant à un niveau supérieur d'abstraction et de généralisation, soit dans la continuité de ce qui est amorcé au lycée.

IV. CONCLUSION GENERALE

Le colloque et les actes dont sont extraits ces deux comptes rendus d'atelier ont permis de réunir plus d'une centaine de personnes, de tous statuts, des professeurs de lycée, des universitaires, des formateurs d'enseignants, des inspecteurs de l'éducation nationale.

Les mathématiques sont la seule discipline à bénéficier de structures telles que les IREM. Ces structures regroupées au sein d'un réseau national permettent l'émergence de groupes de travail sur les problématiques liées à l'enseignement des mathématiques dont la transition entre le lycée et l'université en est un exemple. Le réseau des IREM permet ainsi la rencontre des différentes catégories de professeurs et favorise les relations entre tous les différents niveaux, de l'enseignement élémentaire jusqu'à l'enseignement universitaire. Les travaux de ces groupes sont coordonnés et mutualisés au niveau national par l'intermédiaire des commissions inter IREM. Cette organisation du travail conduit ainsi à des productions de qualité, bénéficiant d'une large diffusion et surtout répondant réellement aux attentes des enseignants. Ces éléments contribuent entre autres à faire des IREM un acteur essentiel dans la formation continue des professeurs. C'est donc tout naturellement que la didactique des mathématiques a largement profité du travail effectué dans les IREM depuis quarante ans si bien que sa place au sein des mathématiques appliquées est pleinement reconnue en France. Lorsque la nécessité d'organiser un colloque sur l'impact de la réforme des programmes du lycées et son implication sur la transition Lycée/Université, c'est tout aussi naturellement que les commission CI2U et CII Lycée se sont retrouvées autour de la problématique de la transition secondaire supérieur.

On voit dans cette contribution comment les analyses des contenus à la transition secondaire-supérieur sont nourries tant par les apports des enseignants de terrain – qu'ils soient en poste dans le secondaire ou le supérieur – des chercheurs dans des disciplines académiques – spécifiquement l'analyse et la logique ici – que par des didacticiens des mathématiques qui permettent d'approfondir les relations entre enseignement et apprentissage en jeu dans ces échanges.

Les thèmes des deux ateliers que nous avons choisis d'exposer dans ce texte cristallisent de nombreuses difficultés en analyse rencontrées par des étudiants au début de l'université : la structure de la droite réelle et la formalisation logique. Une construction du concept de nombre réel peut-être amorcée au lycée mais elle ne peut se faire que dans le long terme et ne peut faire l'économie de moments d'institutionnalisation. La connaissance essentiellement opératoire qu'ont les élèves à l'issue du lycée ne suffit pas à elle seule pour asseoir le processus de conceptualisation de nombre réel et ensuite des concepts fondamentaux de l'analyse, comme la notion de limite par exemple. Les nouveaux programmes laissent encore à la discrétion des enseignants les activités qui favorisent ces constructions. Il en va de même des notions de logique qui doivent provoquer un travail spécifique, tout en étant contextualisé pour que d'autres notions du programme soient abordées, ou en travaillant logique et raisonnement dans des activités spécifiquement conçues pour ça. Là encore, il est à craindre que les contraintes horaires et les hétérogénéités des parcours des enseignants ne les dissuadent de faire ce travail, d'autant plus qu'une majorité de professeurs pense que faire de la logique en acte est suffisant pour les élèves.

Ces nouveaux programmes des filières scientifiques ont finalement été pensés pour donner une culture scientifique à une majorité d'élèves, qui n'étudieront pas nécessairement les sciences après le lycée. L'approfondissement serait repoussé aux enseignements scientifiques post baccalauréat. Cependant le développement des capacités attendues à la fin de la terminale S ne permet plus, sauf aux très bons élèves, d'envisager sereinement des études scientifiques. Un large consensus s'est donc dégagé à l'issue de notre colloque pour estimer que les nouveaux programmes rendent la transition entre le lycée et le supérieur encore plus rude et complexe à intégrer dans nos activités en classes qu'elle ne l'était déjà, tant en terminale qu'en première année d'Université.

REFERENCES

Bloch I., Ghedamsi I. (2005) Comment le cursus secondaire prépare-t-il les élèves aux études universitaires ? Le cas de l'enseignement de l'analyse en Tunisie. *Petit x* 69, 7-30

Bronner A. (1997) *Etude didactique des nombres réels. Idécimalité et racine carrée*. Thèse de doctorat. Université Grenoble.

Bouvart G., Forgeoux E., Fabert C. Grenier, D., Mesnil Z. (2013) Un « retour » de la logique dans les programmes, une occasion à ne pas manquer ! In IREM Paris 7 (2013), *Actes du colloque La réforme des programmes du lycée et alors ?*, *IREM Paris 7 – Université Paris Diderot* (pp. 171-182).

Durand-Guerrier V., Vergnac M. (2013) Les réels à la transition secondaire-supérieur. Du discret au continu-Quelle élaboration ? In La Réforme des Programmes de Lycée : et alors ? In IREM Paris 7 (2013), *Actes du colloque La réforme des programmes du lycée et alors ?*, *IREM Paris 7 – Université Paris Diderot* (pp. 135-147).

IREM Paris 7 (2013) *Actes du colloque La réforme des programmes du lycée et alors ?, IREM Paris 7 – Université Paris Diderot.*

Vergnac M., Durand-Guerrier V. (2014) Le concept de nombre réel au lycée et en début d'université : un objet problématique. *Petit x* 96, 7-28.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

RUPTURE EN FORMALISME ET EN DEMONSTRATION DANS LA TRANSITION SECONDAIRE-SUPERIEUR : CAS DES FILIERES SCIENTIFIQUES DE L'UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU

Timbila SAWADOGO[*]

Résumé : L'échec massif en mathématiques des étudiants en première année des filières scientifiques de l'université de Ouagadougou qui étaient pourtant brillants dans cette matière au secondaire, impose des réflexions sur le phénomène de transition entre le lycée et l'université. Après une analyse des programmes de mathématiques des cycles secondaire et supérieur, nous montrons qu'il existe une certaine rupture en matière de formalisme et les exigences en démonstration.

Mots-clés : transition, rupture, formalisme, démonstration, programme de mathématiques,

Abstract : The massive failure in mathematics of first year students of the University of Ouagadougou scientific fields that were yet brilliant in that subject in secondary school, imposes thoughts on the phenomenon of transition between high school and college. After analyzing the mathematics curriculum in secondary and higher cycles, we show that there is some formality material out and demonstration requirements.

Keywords: transition, breaking, formalism, demonstration, mathematics program

I. INTRODUCTION

L'échec scolaire en première année d'enseignement supérieur est un phénomène répandu dans le monde (Romainville, 2000 ; Corriveau, 2007). Cet échec semble beaucoup plus accru dans certaines disciplines comme les mathématiques et pose le problème de la qualité de la transition entre le secondaire et le supérieur en mathématiques (Sawadogo, 2014).

Cet échec des étudiants en mathématiques dans l'enseignement supérieur est probablement une des causes du désintérêt des élèves titulaires du baccalauréat pour des études scientifiques au Burkina Faso si on compare les effectifs des nouveaux bacheliers demandant à s'inscrire dans les filières scientifiques à ceux des autres filières.

Les difficultés en mathématiques dans la transition secondaire-supérieur ont fait l'objet de nombreux travaux de recherche (Praslon 2000; Corriveau 2007; Najar 2010; Fulvi 2010 ; Sawadogo 2014). Des difficultés liées au formalisme et à la démonstration ont été relevées par certaines auteurs(Corriveau 2007; Fulvi 2010).

[*] Université de Koudougou - Burkina Faso

Sawadogo T. (2015) Rupture en formalisme et en démonstration dans la transition secondaire-supérieur : cas des filières scientifiques de l'université de Ouagadougou. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – Spé3, pp. 1005-1013.

Dans cette communication, il s'agit pour nous, de montrer qu'entre les programmes de mathématiques du secondaire du Burkina Faso et ceux de la première année des filières scientifiques de l'Université de Ouagadougou, il y a un saut en matière de formalisme et de démonstration.

Pour mieux comprendre notre analyse, il nous semble important de présenter le contexte de l'étude. Par la suite les programmes d'enseignement en mathématiques des deux ordres d'enseignement sont analysés en lien avec le formalisme et les exigences en démonstration.

II. CONTEXTE ET METHODOLOGIE

Le Burkina Faso a entamé en 2007 une réforme de son système éducatif. Le système éducatif du Burkina Faso compte quatre ordres d'enseignement que sont l'éducation de base, l'enseignement secondaire, l'enseignement supérieur et la formation professionnelle et technique. L'enseignement secondaire général se subdivise en séries littéraires et scientifiques. Les séries scientifiques[334] préparent pour les parcours scientifiques dans l'enseignement supérieur. Dans la vision de cette réforme de l'éducation, un continuum devrait exister entre ces quatre ordres d'enseignement. Deux ministères ont la charge de ces quatre ordres d'enseignement. Le ministère de l'éducation nationale et de l'alphabétisation a en charge l'éducation de base[335] tandis que le ministère des enseignements secondaire et supérieur s'occupe du reste[336].

On constate cependant que chaque ordre semble évoluer de manière isolée. C'est ainsi qu'au niveau des programmes d'enseignement, chaque ordre d'enseignement dispose de ses commissions de programmes d'enseignement.

Dans le cadre de notre étude, nous nous intéressons aux programmes du secondaire. A ce niveau, la commission des programmes a une sous-commission chargée des programmes de mathématiques. Cette sous-commission est formée d'encadreurs[337] des niveaux primaire, secondaire et d'enseignants de mathématiques du secondaire et du supérieur. Les programmes de mathématiques du niveau de l'enseignement post-primaire[338] ont été révisés en 2009 tandis que ceux de l'enseignement secondaire l'ont été depuis 1995. Notre analyse prend en compte les programmes des deux ordres.

Pour l'enseignement supérieur, les programmes de mathématiques des filières scientifiques de l'université de Ouagadougou sont en relecture. Les programmes que nous analyserons sont ceux datant de l'entrée dans le système LMD[339] en 2009. Nous utilisons à cet effet une analyse de contenus visant à repérer les objectifs et instructions des programmes, à les rapprocher et à tirer des interprétations.

[334] Les séries scientifiques au lycée sont la série C (Sciences expérimentales) et la série C (Sciences et mathématiques)
[335] L'éducation de base regroupe le préscolaire (enfants de 3 à 5 ans), le primaire (enfants de 6 à 11 ans) et le post-primaire (120à 15 ans)
[336] L'enseignement secondaire regroupe les classes de seconde à la terminale (enfants de 16 à 18 ans)
[337] Les encadreurs sont des inspecteurs ou des conseillers pédagogiques
[338] Le post-primaire est le cycle du système secondaire comprenant les classes de la sixième à la troisième.
[339] Licence-Master-Doctorat

III. LES PROGRAMMES DE MATHEMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Historiquement les programmes de mathématiques de l'enseignement secondaire au Burkina Faso étaient ceux de la France (pays colonisateur) des années 1970. Ce n'est que récemment que des programmes propres au Burkina Faso ont été élaborés. Ceux en vigueur datent des années 1995.

1. Objectifs et instruction relatives à la démonstration et au formalisme

En sus des contenus à enseigner, les programmes de mathématiques contiennent des instructions et commentaires relatifs aux contenus et à la méthodologie d'enseignement. Ces instructions et commentaires fixent les limites à ne pas dépasser en termes de contenus par rapport au niveau de la classe. Les programmes se subdivisent principalement en trois grands domaines que sont l'arithmétique, l'analyse et la géométrie. Le formalisme et la démonstration se retrouvent dans tous ces domaines.

Dans le cadre du formalisme et de la démonstration, il est préconisé un apprentissage progressif du raisonnement logique. C'est ainsi que dans les classes de sixième et de cinquième l'accent est mis sur l'apprentissage d'un certain vocabulaire lié au langage mathématique et à la logique :

> L'étude de ce vocabulaire a pour but d'apprendre à l'élève à utiliser correctement chacun des mots (un, le, les, des, chaque, tout, tous, et, ou). La distinction du sens des mots « un », « tous », en particulier est fondamentale pour la compréhension de l'énoncé de certaines définitions ou propriétés (propriétés des opérations par exemple) et l'apprentissage de la démonstration. (MESSRS 2009, p.23)

Le programme stipule néanmoins que l'apprentissage de ce vocabulaire ne doit pas faire l'objet d'une leçon ; une mise en garde qui peut ouvrir le chemin à un déficit d'enseignement de ce vocabulaire lorsque les enseignants ne trouvent pas dans les autres contenus indexés les situations pour introduire le vocabulaire mentionné.

Des éléments de formalisme tels que les symboles d'inclusion, d'union, d'intersection, d'appartenance, d'infériorité et de supériorité sont aux programmes des classes de sixième et de cinquième.

L'intention des programmes des classes de quatrième ($4^{ème}$) et de troisième ($3^{ème}$) sont la consolidation de l'usage des instruments de dessin et de mesure, l'acquisition des techniques opératoires et l'entrainement au raisonnement déductif.

La connaissance et l'utilisation des propriétés de certaines applications du plan, l'utilisation de l'outil vectoriel pour certaines démonstrations apparaissent clairement dans le programme de quatrième. Le même programme mentionne aussi la nécessité d'un apprentissage de la logique à travers des instructions relatives à l'entraînement à la démonstration et à l'utilisation de *« si…alors… » :*

> L'enseignement des mathématiques en classe de quatrième doit familiariser progressivement l'élève avec la pratique de la démonstration. La locution « si A alors B » est utilisée dans le sens de « A est vrai » donc « B est vrai ». On ne parlera pas du fait que « si A alors B » est vrai lorsque A est faux ! Et on n'utilisera pas le symbole « $\Rightarrow$ ». L'équivalence logique et l'emploi de son symbole ne sont pas au programme. Cette familiarisation progressive de l'élève avec la pratique de la démonstration ne doit pas faire l'objet d'un cours théorique mais sera faite en liaison avec les différentes parties du programme tout au long de l'année.(MESSRS 2009, p.34)

L'enseignement/apprentissage de la démonstration est clairement annoncé à travers le raisonnement déductif à un pas. L'expression « si A alors B » marquant le raisonnement par implication doit être enseigné aux apprenants sans cependant faire l'objet d'un cours spécifique. Le programme exclut l'utilisation de son symbole et l'enseignement de l'équivalence logique.

Les programmes de la classe de troisième ($3^{ème}$) prévoient le renforcement de la pensée déductive, l'apprentissage de l'équivalence logique et l'apprentissage de la rédaction d'une démonstration. L'extrait ci-dessous du programme de troisième, intitulé logique, entrainement à la démonstration est illustratif à ce sujet :

Utilisation du « si…alors… »

> Enoncé réciproque. L'énoncé « si A alors B » est considéré dans le cas où A est vrai .Lorsque deux énoncés « si A alors B » et « si B alors A » sont vrais, on les résumera en « A si et seulement si B ». Le professeur veillera à ce que l'élève ne confonde pas l'énoncé « si A alors B » avec sa réciproque « si B alors A » .Le professeur veillera à ce que l'élève prenne conscience du rôle joué par des notions telles que la négation, les connecteurs et les quantificateurs sans que ces notions soient formalisées. L'utilisation de leurs symboles n'est donc pas au programme (MESSRS 2009, p.48)

L'entraînement à la démonstration ne doit pas faire l'objet d'un cours théorique mais sera fait en liaison avec les différentes parties du programme tout au long de l'année. Les quantificateurs sont mentionnés comme une nécessité par le programme qui exclut cependant leur formalisation. Les notations symboliques de l'implication, de l'équivalence sont aussi exclues.

Les programmes de l'enseignement secondaire peuvent être considérés comme une suite des programmes du post-primaire. Nous axerons notre analyse sur les programmes de mathématiques des séries scientifiques car elles sont les pourvoyeuses d'étudiants poursuivant des études mathématiques au niveau du supérieur. Les buts visés par l'enseignement des mathématiques dans les séries scientifiques de l'enseignement secondaire général peuvent être perçus dans le passage suivant:

> Le présent programme est celui d'une classe de seconde préparant de manière privilégiée aux différentes filières scientifiques et techniques (sections C, D, E, F). Afin d'éviter une orientation trop marquée par une section de type C, il convient de le préserver d'une intervention artificielle de descriptions de structures et de ne pas l'alourdir par une algébrisation prématurée. Ont été ainsi résolument écartés les sujets présentant de trop grandes difficultés conceptuelles et techniques au bénéfice d'une meilleure solidité sur les points essentiels. On s'en tiendra à un cadre et à un vocabulaire théoriques modestes, mais suffisamment efficaces pour l'étude des situations usuelles, et assez riches pour servir de support à une formation mathématique solide. (MESSRS 1996a, p.1)

L'orientation méthodologique générale selon le programme de Seconde C doit développer chez les élèves la pratique d'une démarche scientifique « en développant conjointement les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique » et l'accent doit être mis sur l'acquisition de méthodes.

Le programme de la classe de seconde C indique la nécessité :

> […]d'entrainer les élèves à la pratique d'une démarche scientifique, en développant conjointement les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique, l'accent doit être mis sur l'acquisition de méthodes. (MESSRS 1996a, p.1).

L'activité des élèves est à privilégier en les orientant vers la résolution de problèmes et en limitant le contenu aux notions et aux résultats essentiels. La mise en place du raisonnement mathématique et des différentes phases de la démarche mathématique est au centre de l'enseignement des mathématiques en classe de seconde C :

> Il convient de souligner les formes diverses des raisonnements mathématiques mis en jeu dans les situations étudiées. Tout exposé a priori de logique mathématique est exclu. C'est à travers les activités que l'on mettra en lumière les différentes phases de la démarche mathématique : expérimentation, conjectures, argumentation, élaboration d'une preuve et rédaction de la démonstration. (MESSRS 1996b, p.1)

L'utilisation des connecteurs et des quantificateurs y est aussi recommandée. La clarification des notions d'exemple, de contre-exemple, de vérification, de conjecture, de déduction et d'équivalence figure au centre des objectifs au programme.

> Ainsi, tout au long de l'année, chaque fois que cela peut faciliter la compréhension, il est bon d'apprendre aux élèves à utiliser :
> - les connecteurs : "et", "ou" ;
> - les quantificateurs : "quel que soit", "il existe".
>
> En fin d'année scolaire, les élèves doivent avoir une idée claire des notions suivantes :
> - notion d'exemple,
> - notion de contre-exemple (utilisation du contre-exemple),
> - notion de vérification,
> -notion de déduction (si...alors...; hypothèse; conclusion; condition nécessaire; condition suffisante),
> - notion de conjecture,
> - notion d'équivalence (...si et seulement si...). (MESSRS 1996b, p.1)

Le programme spécifie que les sujets présentant de trop grandes difficultés conceptuelles ou techniques doivent être écartés au bénéfice de ceux développant chez les élèves une bonne solidité sur les points essentiels et les savoir-faire fondamentaux. On constate que la classe de seconde marque le début d'un véritable apprentissage de la démonstration. L'utilisation des quantificateurs et connecteurs doit être faite en liaison avec d'autres contenus car le programme proscrit un cours spécifique de logique. Le programme reste cependant muet sur l'utilisation des symboles des quantificateurs et d'autres symboles. Le fait que les programmes des classes antérieures aient été explicites sur l'exclusion des symboles nous laisse penser à une autorisation des symboles en classe de seconde C.

Les intentions de programmes de classes de terminales des séries C et E sont dans la continuité de ceux des programmes de la seconde C :

- poursuivre et approfondir la pratique d'une démarche scientifique ;
- exploiter les interactions entre les mathématiques et les autres disciplines ;
- initier une réflexion sur l'existence de structures mathématiques.

Les programmes mettent l'accent sur la résolution de problèmes, l'entrainement à l'activité scientifique et la promotion de l'acquisition de méthodes chez les élèves :

> On dégagera clairement les objectifs, on s'attachera à mettre en place des synthèses brèves, on veillera à respecter les limites strictes du programme en ce qui concerne le niveau d'approfondissement des concepts et le degré de technicité exigible.
>
> Dans la perspective d'une formation ultérieure en mathématiques plus spécialisée, on mettra en évidence, principalement en Terminale C, la notion d'une identité de structure pour des ensembles d'objets de natures différentes, sans que pour autant cette structure fasse l'objet d'une étude en soi. C'est ainsi, par exemple, qu'à l'occasion d'un travail sur les nombres complexes, de certaines transformations du plan, on abordera la notion de groupe et de corps. Le calcul vectoriel dans le plan ou dans l'espace permettra de rappeler la notion d'espace vectoriel sur IR. (MESSRS 1996d, p.1)

Ce passage des programmes montre qu'il est exclu une étude systématique des structures algébriques.

2. *Que retenir de l'analyse en lien avec le formalisme et la démonstration*

De l'analyse des programmes de l'enseignement secondaire général, on peut tirer les conclusions suivantes :

Un agencement clair dans les objectifs et consignes dans le cadre de la démonstration et du formalisme. De la sensibilisation à la démonstration en classes de $6^{ème}$ et de $5^{ème}$ on passe à l'entrainement de la démonstration en classes de $4^{ème}$ et de $3^{ème}$ pour terminer par la mise en place d'une démarche scientifique dans les classes du second cycle. Les quantificateurs existentiel et universel sont vus en classe de seconde sans instruction sur l'utilisation de leurs symboles. Les cours spécifiques de logique sont exclus et les structures algébriques ne doivent pas faire l'objet d'une étude en soi.

D'après les programmes, les principales exigences en démonstration de la sixième à la terminale D et à la terminale C peuvent se résumer à la maîtrise de la pensée déductive sur de courtes séquences et de la démonstration par récurrence. En terme de formalisme, l'utilisation des connecteurs "et" et "ou" et des quantificateurs "quelque soit" et "il existe" sont des objectifs du programme. Toute fois l'utilisation des symboles des quantificateurs ne sont pas au programme.

IV. LES PROGRAMMES DE MATHEMATIQUES DE LA PREMIERE ANNEE DES FILIERES SCIENTIFIQUES

Notre analyse à ce niveau porte sur les programmes de mathématiques des deux premiers semestres de la licence sciences et technologies de l'université de Ouagadougou.

1. Objectifs et instructions relatives à la démonstration et au formalisme

Les programmes actuels de la première année des filières scientifiques de l'université sont ceux adoptés à l'entrée au système LMD en 2009. Ces programmes en vigueur mais toujours en relecture contiennent deux cours de mathématiques désignés respectivement MATH11 et MATH12. Ces deux cours constituent les cours de mathématiques de la première année d'étude (S_1 et S_2) des filières scientifiques de l'université de Ouagadougou.

D'après les documents programmes, le cours MATH11 est commun à tous les parcours et se déroule au premier semestre. Ce cours destiné à réviser les bases et à égaliser les niveaux est destiné à tous les étudiants des parcours biologie, biochimie, géologie, informatique, mathématique, chimie physique.

Ce cours d'un volume horaire de 40 heures se subdivise en cours théoriques et travaux dirigés. Il porte sur les contenus suivants :

- La géométrie élémentaire du plan (repérage dans le plan, produit scalaire, déterminant de deux vecteurs, droites du plan, distance d'un point à une droite, équation normale d'une droite, coniques),
- la géométrie élémentaire de l'espace (repérage dans l'espace, produits scalaire et vectoriel, déterminant, produit mixte),
- la notion d'espace vectoriel (combinaisons linéaires de vecteurs, bases, coordonnées)
- les nombres complexes (construction de $\mathbb{C}$, notion de corps)
- les nombres réels, les suites numériques
- les fonctions numériques (continuité, théorèmes de valeurs intermédiaires)

Nous constatons, de notre expérience d'enseignants, que la plupart des notions, sont dans leur large majorité étudiées en classe de terminale C. Ce cours étant destiné à tous les étudiants des filières scientifiques, les mathématiques de la série D devraient suffire comme prérequis à ce cours. Autrement dit tous les bacheliers de la série D devraient pouvoir suivre ce cours sans trop de difficultés puisque le BAC est encore un examen très sélectif (38,38% de succès en 2012). On peut sans risque de se tromper dire que les bacheliers sont au moins des élèves moyens surtout que dans les conditions d'orientation dans ces parcours, il y a l'exigence d'avoir obtenu au moins la moyenne en en mathématiques au Baccalauréat des séries C et D.

Quant au cours MATH12, il n'exige pas une validation du cours MATH11. On pourrait alors penser que les seuls prérequis sont aussi les connaissances mathématiques de la terminale D. Mais ce cours utilise les acquis mathématiques de MATH11 comme nous le verrons dans son contenu. Il est prévu au semestre 2 et est destiné aux étudiants des filières chimie, informatique, mathématiques et physique. Il se subdivise en deux parties : analyse et algèbre et géométrie.

Dans la partie analyse, sont à l'étude :

- Les suites numériques (suites extraites, suites de Cauchy, théorème de Bolzano-Weierstrass)
- les fonctions réelles (fonctions continues, fonctions continues et monotones, fonctions réciproques, fonctions dérivables, formule de Taylor, développements limités.

La partie algèbre porte sur :

- les espaces vectoriels (définitions, sous-espaces vectoriels, bases et dimension).
- les applications linéaires (noyau, image, calcul dans l'espace vectoriel $l(E,F)$).
- Les matrices (définition, calcul matriciel, changement de base, déterminants d'ordre 2 et 3).

2. *Des points de rupture entre les programmes du secondaire et du supérieur*

Nous constatons sur le plan de la forme, à la différence des programmes de mathématiques de l'enseignement secondaire, qu'il n'y a pas d'objectifs spécifiques définis par contenu d'enseignement. Il n'y a pas non plus des instructions ou des commentaires indiquant la méthodologie ou circonscrivant les notions à enseigner. L'organisation du cours en cours théoriques et en travaux dirigés avec plusieurs enseignants laisse voir la rupture avec les pratiques enseignantes au secondaire. Il n'y a pas de consignes spécifiques en ce qui concerne la démonstration et le formalisme.

Un autre constat que nous faisons est que les programmes de mathématiques de la première année des filières scientifiques sont assez synthétiques. Il n'y a pas de balises en termes d'objectifs spécifiques d'enseignement. Il n'y a pas d'orientation méthodologique globale et spécifique d'enseignement, ce qui peut ouvrir la voie à tous les manquements ou excès tant dans la méthodologie que dans les contenus d'enseignement.

Sur le plan du formalisme et de la démonstration, les contenus comme les structures algébriques, les fonctions numériques, les suites numériques pour ne citer que celles-ci sont d'énormes réservoirs de formalismes mathématiques. Par exemple les définitions de limite de fonction ou de suite seront formelles avec l'utilisation de plusieurs quantificateurs : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ et $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in IN / n > N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$. Les limites de références des fonctions et des suites seront démontrées. Dans ce volet on notera l'absence de cours spécifiques de logique dans les contenus ci-dessus évoqués.

Le cas des limites des suites et des fonctions mérite qu'on s'y attarde. Que disent les programmes du secondaire à cet effet.

Les programmes du secondaire sont assez explicites à propos de la notion de limite dans le cas des fonctions et des suites numériques. Les objectifs pour la classe de première C prévoient une initiation à la notion de limite en excluant toute étude théorique :

Les élèves doivent :

- connaître le comportement des fonctions de référence quand |x| devient "grand" ou "petit" ;
- avoir une connaissance intuitive du sens des notations : $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to 0} f(x)$
- savoir calculer sur des exemples la limite d'une fonction à l'aide des opérations algébriques ou de la comparaison avec une fonction dont on a déterminé la limite ; (MESSRS, 1996b ; p.11)

Le programme exclut toute étude théorique impliquant la définition évoquée ci-dessus. Le programme de terminale C prévoit un renforcement des propriétés vues en classe de première :

> Pour la notion de limite, le point de vue adopté reste le même qu'en classe de première : les définitions par $(\varepsilon;\alpha)$ et $(\varepsilon;A)$ sont hors programme.
>
> Les résultats sur les limites sont admis : il n'y a pas lieu de s'y attarder. Ils ne constituent pas un objectif en soi, mais visent uniquement à faciliter l'étude du comportement d'une fonction aux bornes de son ensemble de définition. (MESSRS 1996d ; p.7)

Ces deux extraits indiquent que les programmes de l'enseignement secondaire excluent tout exposé théorique sur les limites des fonctions. Les mêmes consignes sont adoptées pour les suites numériques. Ceci montre bien que l'utilisation de la définition théorique de la limite d'une fonction ou d'une suite n'est pas au programme de l'enseignement secondaire, excluant du coup une initiation à la manipulation d'énoncés par les élèves du secondaire. Les programmes d'enseignement jouent alors un rôle dans la rupture en formalisme dans la transition secondaire-supérieur.

V. CONCLUSION

De l'analyse des programmes des deux cycles d'enseignement, il se dégage une différence de structuration tant dans le fond que dans la forme. Dans l'enseignement secondaire, les programmes encadrent l'activité de l'enseignant à travers des consignes portant sur les contenus à enseigner et la méthodologie d'enseignement à utiliser. De ces instructions officielles se dégage un enseignement progressif du raisonnement logique, de la démonstration et du formalisme. Cet enseignement progressif devrait passer par des situations liées à des contenus du programme sans passer par des leçons spécifiques d'enseignement de la logique. On remarque un engagement prudent dans l'utilisation des symboles des quantificateurs existentiel et universel.

Dans l'enseignement supérieur, les programmes sont muets par rapport aux limites dans les contenus car ne précisant pas les objectifs à atteindre et les limites à respecter. Le même constat est fait par rapport au formalisme et à la démonstration. Une quasi-liberté dans ces deux volets est laissée aux enseignants du supérieur. Le manque d'instructions spécifiques sur ces aspects dans le supérieur peut être source d'un saut dans les exigences en formalisme et en démonstration.

L'analyse des programmes montre donc qu'ils peuvent être les causes d'une rupture au niveau du formalisme et de la démonstration dans la transition secondaire-supérieur au Burkina Faso. Des pistes de solutions à cette rupture passeraient par une prise de conscience au niveau institutionnel, un rapprochement des programmes.

REFERENCES

Corriveau C. (2007) *Arrimage secondaire-collégial, démonstration et formalisme.* Mémoire inédit. Montréal : Université du Québec à Montréal.

Fulvi J. (2010) *Préparation à la démonstration et au formalisme supplée au collégial par le cours de mathématiques pour les sciences*. Mémoire inédit. Université du Québec, Service des bibliothèques.

MESSRS (1996a) *Mathématiques, programmes et instructions, classes du second cycle, classe de seconde C.* Ministère des enseignements secondaire, supérieur et de la recherche scientifique; Direction des inspections et de la formation du personnel de l'éducation, Inspection de Mathématiques, Burkina Faso.

MESSRS. (1996b). *Mathématiques, programmes et instructions, classes du second cycle, classe de Première C/E*. Ministère des enseignements secondaire, supérieur et de la recherche scientifique; Direction des inspections et de la formation du personnel de l'éducation, Inspection de Mathématiques, Burkina Faso.

MESSRS (1996d) *Mathématiques, programmes et instructions, classes du second cycle, classe de Terminale C/E.* Ministère des enseignements secondaire, supérieur et de la recherche scientifique; Direction des inspections et de la formation du personnel de l'éducation, Inspection de Mathématiques, Burkina Faso.

MESSRS (2009) Nouveaux programmes de mathématiques de l'enseignement général post-primaire: Ministère des enseignements secondaire, supérieur et de la recherche scientifique; Direction des inspections et de la formation des personnels de l'éducation, Inspection de Mathématiques, Burkina Faso.

Najar R. (2010) *Effets des choix institutionnels d'enseignement sur les possibilités d'apprentissage des étudiants: Cas des notions ensemblistes fonctionnelles dans la transition Secondaire/Supérieur*. (Thèse de doctorat inédit). Paris : Université Paris Diderot,.

Praslon F. (2000) *Continuités et ruptures dans la transition Terminale S/DEUG Sciences en Analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement*. Thèse de doctorat inédit. Paris: Université Paris Diderot, Paris 7.

Romainville M. (2000) *L'échec dans l'université de masse*. Paris, l'Harmattan

Sawadogo T. (2014) *Transition secondaire supérieure: Causes d'échecs en mathématiques dans les filières scientifiques de l'université de Ouagadougou.* Thèse de doctorat inédit. Koudougou : Université de Koudougou.