Actes du colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec

GDM 2005

Raisonnement mathématique

et formation citoyenne

UNIVERSITÉ du QUÉBEC à MONTRÉAL
3 et 4 MAI 2005

Actes édités par Denis Tanguay, UQAM

Table des matières

Introduction

Le Colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec (GDM) se tient à chaque année dans une université québécoise depuis 1979. En 2005, l'Université du Québec à Montréal (UQAM) en a été l'hôte, les 3 et 4 mai, au Département de mathématiques, Pavillon Kennedy du complexe des sciences. Le thème et le programme du colloque ont été élaborés par le comité de coordination du GDM, composé en 2004-2005 de France Caron de l'Université de Montréal, de Denis Tanguay de l'UQAM et Laurent Theis, de l'Université de Sherbrooke. Remercions ici tous ceux qui ont contribué à l'organisation locale du colloque, avec parmi eux Claudia Corriveau, Izabella Oliveira, Mireille Saboya, Linda Lemieux, Alexandre Ducharme-Rivard, M^e^ Lucie Dick, Fernando Hitt et au premier chef, Jeanne Laporte-Jobin, maître d'œuvre de cette organisation. Un merci tout particulier à Zakaria El Mrabet, qui a mis sur pied et tenu à jour le site web du colloque avant et pendant sa tenue.

LE THÈME DU COLLOQUE

Le citoyen des sociétés industrialisées est appelé chaque jour à utiliser des systèmes de plus en plus complexes, pour lesquelles ses connaissances techniques et instrumentales sont vite dépassées, et qui requièrent une flexibilité et adaptabilité de la pensée sollicitant fortement sa capacité à *raisonner.* Pour être un citoyen responsable et un consommateur avisé, il doit notamment avoir une compréhension minimale des lois, réglementations, contrats, modes d'emploi, et de leurs mécanismes d'application.

L'étude et la recherche dans des domaines comme ceux de la pharmacologie, de la biochimie, des biotechnologies etc., ou moins spécifiquement dans la plupart des domaines des sciences humaines, ne sont guère possibles sans une maîtrise adéquate du *raisonnement inductif*. Par ailleurs, le développement important des technologies de l'information et la place prépondérante qu'y occupe la programmation informatique créent dans nos sociétés un besoin pressant pour une main d'oeuvre hautement qualifiée, apte à comprendre et gérer des structures logiques de nature essentiellement *déductive*. Il s'en faut de beaucoup que le raisonnement déductif trouve là sa seule utilité.

Quelle place doit occuper le raisonnement dans l'enseignement des mathématiques ? Y a-t-il des types de raisonnements propres aux mathématiques ? Y a-t-il des raisonnements indispensables à la formation d'un citoyen intègre, autonome, critique et responsable, dont l'apprentissage relèverait essentiellement de l'enseignement des mathématiques ? Y a-t-il des types de raisonnements mathématiques dont l'apprentissage relèverait plus spécifiquement de l'enseignement primaire ? De l'enseignement secondaire, collégial ou universitaire ?

Les concepteurs des programmes du *Ministère de l'Éducation du Québec* considèrent pour leur part que l'enseignement de la géométrie constitue un lieu privilégié où initier l'élève aux « … exigences de rigueur, d'exactitude, de justification et de preuve » (MEQ, Math 436, p. 3). Ces exigences ne pourront aller qu'en augmentant, quand on sait que le *nouveau programme* du secondaire fera de la compétence « Déployer un raisonnement en mathématiques » l'une des trois compétences fondamentales. Dans le nouveau programme du primaire déjà en place, la compétence « Raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques » joue également un rôle central. Comment la manière d'aborder les concepts et processus mathématiques doit-elle évoluer du primaire au secondaire, pour que les raisonnements progressent jusqu'à rencontrer ces « exigences de rigueur, d'exactitude, de justification et de preuve », caractéristiques de l'activité mathématique ? Cette progression peut-elle se faire sans entraver chez l'élève le développement de l'intuition, de l'imagination, de la créativité, de l'inventivité, dont on reconnaît maintenant qu'elles doivent elles aussi faire partie intégrante de l'activité mathématique, pour peu qu'on la veuille riche et stimulante ?

Qu'est-ce qu'une *preuve* ? Qu'est-ce que la *rigueur* ? Est-il trop tôt pour envisager preuves et rigueur au primaire ? Pourquoi les mathématiciens — avec parmi eux les rédacteurs de programmes — associent-ils si spontanément preuve et géométrie ? Quels apprentissages liés au raisonnement mathématique permet l'étude de la géométrie, que ne permettrait pas l'étude des autres branches comme l'arithmétique, l'algèbre, les probabilités et statistiques, les mathématiques discrètes… ? Ces branches sollicitent-elles des types de raisonnements qui leur seraient spécifiques ? La programmation informatique sollicite-t-elle des raisonnements mathématiques spécifiques ? Est-ce que les nouvelles technologies ont un rôle à jouer dans l'enseignement du raisonnement mathématique ? Dans une perspective plus large, ont-elles un impact sur l'évolution de celui-ci ?

Pour R. Duval (1995), l'apprentissage de la *démonstration* (la preuve formelle) passe par la capacité à juger de la validité d'un raisonnement selon des critères intrinsèques, c'est-à-dire autres que l'apport d'informations empiriquement validées ou l'établissement d'un consensus au sein d'un groupe. Cela n'est possible selon lui que si l'élève accède à une « pratique écrite de l'écrit » (2001, p. 197) faite de pauses, de retour sur les propositions déjà énoncées, de réaménagements et simultanéisations (pour rapprocher des propositions ou blocs de propositions non contigus dans le texte), de recul, d'appréhension globale (pour saisir certains éléments de macro-organisation) ; bref, de *réflexion*. Toutes choses que ne permet pas cette « linéarisation de la pensée » (op. cit., p. 191) imposée par une pratique orale du texte, faite de fluence, de séquencialité, d'irréversibilité. À travers une telle « pratique écrite de l'écrit », l'élève produit le texte de démonstration non plus à des fins de communication, mais pour « en contrôler et la validité, et l'absence de lacunes » (op. cit., p. 197). Avant Duval, Balacheff (1987) avait parlé d'une adhésion de l'élève-étudiant à une position théorique, au centre de laquelle celui-ci met la connaissance plutôt que la nécessité de convaincre « l'autre », et où prévaut sa très personnelle et simple *satisfaction intellectuelle*.

On objectera que la majorité des élèves n'a pas besoin d'une maîtrise aussi poussée de la démonstration, et que la rationalité « … fondée sur le dialogue et orientée vers la régulation des interactions sociales » (Duval, 2001, p. 204) — qui s'exprime entre autres à travers ce que les didacticiens conviennent maintenant d'appeler *l'argumentation* — est suffisante à la formation d'un citoyen éclairé. Au citoyen qui souhaite, dans les sphères où il déploie ses activités, organiser de manière optimale le travail de réflexion préalable à toute prise de décision, refusera-t-on le plus sophistiqué des outils de contrôle de la rationalité qu'est le *raisonnement déductif* ? Comment amener l'élève à en avoir une compréhension *opératoire*, au sens de Fischbein (1982) ; c'est-à-dire telle que les mécanismes logiques sous-jacents parviennent, dans l'entendement de l'élève, à une forme de cognition directe, globale, efficace et immédiatement disponible ? Peut-on donner à l'élève accès aux savoirs de logique formelle sans inhiber sa capacité à recourir à l'imagination, à l'intuition, aux associations, aux analogies, aux métaphores ? Si oui, comment préparer cet accès au primaire et l'aménager, le cas échéant, au secondaire ?

Sur ces questions, ainsi bien sûr que sur celles qui se sont inévitablement ajoutées au fur et à mesure des échanges, les participants du Colloque GDM-2005 ont été conviés à réfléchir et discuter.

BALACHEFF, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 18, n°2, mai 87, pp. 147-176.

DUVAL, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine.* Éditions Peter Lang, coll. Exploration, recherches en sciences de l'éducation. Berne, Suisse.

DUVAL, R. (2001). Écriture et compréhension : Pourquoi faire écrire des textes de démonstration par les élèves ? In *Produire et lire des textes de démonstration*. Collectif coord. par É. Barbin, R. Duval, I. Giorgiutti, J. Houdebine, C. Laborde. Ellipses. Paris.

FISCHBEIN, E. (1982). Intuition and Proof. *For the Learning of Mathematics,* n°3, vol. 2 (novembre), pp. 9-19.

LE DÉROULEMENT DU COLLOQUE

Le colloque s'est organisé autour de deux conférences plénières, chacune d'elles suivie par une période de discussion en groupes de travail pour examiner certains des enjeux proposés et pour en débattre. La discussion devait permettre de formuler des questions aux conférenciers. De retour en session plénière, ceux-ci y ont répondu, en cherchant à préciser les éléments de leur exposé initial en lien avec les enjeux soulevés.

La conférence de Raymond Duval, de l'Université du Littoral Côte d'Opale (ULCO, située à Dunkerque, Boulogne-sur-mer, Calais et Saint-Omer dans le Nord de la France) a ouvert le colloque en cherchant à dégager en quoi les spécificités du raisonnement mathématique — notamment telles qu'elles sont mises en œuvre en démonstration — sont susceptibles de contribuer au développement personnel de la rationalité, et de constituer ainsi un enjeu éducatif majeur.

Quinze communications, présentées par Gustavo Barallobres, Analia Bergé, Lucie De Blois et Annie Savard, Elena Ekimova, Viktor Freiman et Alexeï Volkov, Fernando Hitt, Philippe Labrosse, Izabella Oliveira, Richard Pallascio, Sophie René de Cotret et Réal Larose, Philippe R. Richard, Mireille Saboya, Yves Saint-Pierre, Kalifa Traoré, Sylvain Vermette, ont enrichi les réflexions sur le thème.

Dans sa conférence de clôture, Anna Sierpinska, de l'Université Concordia à Montréal, s'est interrogée sur la pertinence d'un enseignement explicite des raisonnements mathématiques au regard des profils professionnels visés, sur les effets indésirables observables — tant des points de vue éducatif que cognitif et social — d'un tel enseignement selon les exigences et les modalités adoptées, pour conclure par une réflexion sur les conditions à retenir pour favoriser, chez l'élève-étudiant, une prise en charge autonome, critique, valorisante et valorisée du raisonnement mathématique.

LES PARTICIPANTS

Le colloque a regroupé 49 participants, étudiants, enseignants des niveaux secondaire, collégial et universitaire, professeurs et chercheurs, conseillers pédagogiques, etc. Ces participants provenaient des institutions suivantes : UQAM, Université du Québec à Rimouski, Université du Québec à Chicoutimi, Université de Montréal, Concordia University, Université Laval, Université de Sherbrooke, Université de Moncton, Université du Littoral Côte d'Opale, Commission scolaire de Laval, Commission scolaire de Montréal (CSDM), Statistique Canada. En voici la liste :

Arsenault, Isabelle
Barallobres, Gustavo
Barry, Souleymane
Belkhodja, Maha
Bergé, Analia
Caron, Renée
Caron, France
Corriveau, Claudia
Cyr, Stéphane
De Blois, Lucie
Ducharme-Rivard, Alexandre
Duval, Raymond
Ekimova, Elena
Freiman, Viktor
Gaulin, Claude
Gauthier, Johanne
Giroux, Jacinthe
Hitt, Fernando
Jeannotte, Doris
Jordi Bourrelis, Isabelle
Kieran, Carolyn
Krim, Nadir
Lajoie, Caroline
Larose, Réal
Leblanc, Manon
Lemoyne, Gisèle
Lessard, Geneviève
Marchand, Patricia
Mary, Claudine
Mercier, Armel
Morin, Emelie
Mouboli, Victor
Naghibi, Mahdokht
Oliveira, Izabella
Pallascio, Richard
Petit, Matthieu
René de Cotret, Sophie
Richard, Philippe-R.
Saboya, Mireille
Saint-Pierre, Yves
Savard, Annie
Sierpinska, Anna
Squalli, Hassane
Tanguay, Denis
Theis, Laurent
Traore, Kalifa
Vermette, Sylvain
Vézina, Richard
Vincent, Suzanne

LES ACTES DU COLLOQUE

Dans ces Actes, on retrouve la version texte des deux conférences plénières, remaniées pour prendre en compte certains des éléments qui se sont dégagés des discussions post-conférence. On trouve également la version texte de douze des quinze communications que les conférences encadraient.

Je remercie tous les collègues et étudiants qui ont participé au colloque et à son organisation, et il me reste à souhaiter que ce document contribue à alimenter la réflexion sur l'apport, à la formation citoyenne, du raisonnement mathématique et des mathématiques en général, et à faire bénéficier l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques de ces réflexions, tant sur le plan curriculaire que didactique.

Denis TANGUAY

CONFÉRENCE D'OUVERTURE

Raymond DUVAL

Université du Littoral Côte d'Opale

Compréhension des démonstrations, développement de la rationalité et formation de la conscience individuelle

RAYMOND DUVAL

UNIVERSITÉ DU LITTORAL CÔTE D'OPALE

La manière d'enseigner les mathématiques ne dépend pas seulement de la conception que l'on se fait de l'activité mathématique, mais également des objectifs de cet enseignement dans un système global d'éducation. De ce point de vue, l'exigence de démonstration est peut-être ce qui révèle le mieux ce que les mathématiques peuvent apporter à la formation des individus : non pas des connaissances, souvent inutilisées ou que des logiciels mettent en œuvre à notre place sans qu'on ait à se fatiguer, mais le développement de la rationalité et l'ouverture à des obligations socialement partagées. Les démonstrations se situent, en effet, à un point où des exigences de pensée différentes, comme celle de preuve et celle de non contradiction, se nouent avec des démarches qu'on désigne ordinairement par le terme générique « raisonnement ». L'entrée dans les raisonnements mathématiques et la compréhension des démonstrations par les élèves constituent donc, de ce point de vue, un enjeu éducatif majeur pour la formation.

Le défi auquel l'enseignement se trouve confronté tient au fait qu'il est très difficile de faire trouver cette entrée à la majorité des élèves. Les démonstrations ne fonctionnent pas pour eux comme des preuves, car elles ne semblent pas répondre à un besoin de justification et, lorsque ce besoin est ressenti, elles n'entraînent pas de conviction. Cela a conduit à vouloir introduire l'exigence de preuve à partir de démarches empiriques, de manipulations et de situations d'argumentation portant sur les observations ou les résultats obtenus. Mais peut-on ainsi amener les élèves à la compréhension des démonstrations mathématiques, et même si cet objectif ne pouvait être atteint pour tous, de telles situations peuvent-elles développer cette forme de rationalité par laquelle la pensée et la conscience d'un individu deviennent pleinement autonomes ?

La question de ce qu'un apprentissage des mathématiques peut apporter à la formation générale des élèves doit être envisagée sous deux points de vue différents. Un point de vue épistémologique portant sur les liens entre l'établissement de preuves, la rationalité et les démarche de raisonnement, et un point de vue cognitif portant sur les processus impliqués dans la compréhension des démarches mathématiques de raisonnement et sur ce qui peut être source de conviction ou entraîner une modification de conviction. Ainsi en se plaçant au premier point de vue, la question est celle du rapport entre le développement de la connaissance comme science et l'émergence de cette instance qu'on appelle la « raison », et qui est perçue comme une source d'obligation irréductible et supérieure à toute autre. En se plaçant au deuxième point de vue la question est différente : elle porte à la fois sur les causes profondes de l'incompréhension des démarches mathématiques de raisonnement par les élèves et sur les conditions qui peuvent les leur rendre accessibles. Si l'on veut comprendre la complexité et l'enjeu éducatif de l'exigence de démonstration dans un enseignement des mathématiques, il faut l'envisager sous ces deux points de vue et non pas s'en tenir à un seul.

Pour étudier cette question de l'apport de la compréhension des démonstrations au développement de la rationalité et au « devenir une personne », selon l'expression de Rogers, nous devrons donc adopter à la fois les points de vue épistémologique et cognitif sans les confondre. Pour cela, nous allons examiner les quatre questions suivantes :

1. Qu'accepte-t-on comme preuve en mathématique ?
2. Qu'est-ce qui fait qu'une preuve est une preuve ?
3. Comment passer d'une source de conviction à une autre, ou comment faire prendre conscience du fonctionnement de « déductions » valides ?
4. Quel apport pour la formation au delà des mathématiques ?

La première question est au cœur des débats didactiques sur l'exigence de démonstration. Pour l'introduire, nous évoquerons la variété des procédures de résolution possibles, tant du point de vue mathématique que cognitif, pour deux problèmes classiques de géométrie. La deuxième question porte sur ce qui fonde la connaissance comme science, c'est-à-dire sur ce qui permet non pas d'affirmer un résultat ou une conclusion avec certitude, mais de le faire d'une manière telle que chacun puisse accéder par lui-même à la vérité de ce qui est énoncé. Nous verrons que la preuve a émergé comme expérience de la nécessité et qu'on a été ensuite conduit à distinguer non seulement plusieurs types de nécessité mais des expériences différentes de la nécessité. La troisième question porte sur cette expérience de nécessité propre aux démonstrations et sur les opérations qui l'imposent à travers l'utilisation de définitions et de théorèmes. La dernière question est plus complexe, car le développement de la rationalité prend des formes très différentes selon le type de nécessité dont il procède. Il s'agit alors de distinguer comment chaque forme de rationalité contribue à ouvrir les consciences individuelles à des obligations socialement partagées.

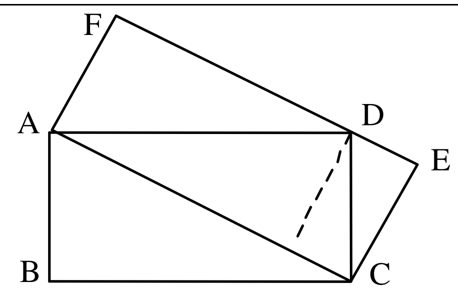
Le passage d'une question à l'autre implique un changement de point de vue. Aussi un lecteur qui serait plus directement intéressé par les aspects cognitifs et didactiques pourrait se limiter à la première et à la troisième question. Le lecteur qui s'intéresserait d'abord à l'apport des mathématiques à la formation générale des élèves pourrait, au contraire, ne regarder que la deuxième et la quatrième question. C'est la complexité de l'enjeu éducatif de l'exigence de démonstration qui impose en quelque sorte cette progression en parallèle de la réflexion.

1. QU'ACCEPTE-T-ON COMME PREUVE EN MATHÉMATIQUE ?

Pour introduire cette question, nous allons partir de deux types de problèmes classiques, l'un de comparaison d'aires et l'autre d'intersection de droites. On pourra ainsi voir la grande variété des procédures de résolution possibles, qui sont mises en œuvre en géométrie. Cela nous permettra de préciser la question dans une perspective d'enseignement : quelles procédures sont acceptées comme des preuves et lesquelles ne peuvent pas l'être ?

1.1. Une très grande variété de types de procédures possibles

Les problèmes de comparaison d'aires sont des problèmes classiques. Ils ont donné lieu à de nombreuses études. Nous en retiendrons un qui présente l'avantage de conduire à des réponses contradictoires selon qu'on s'en tient à des procédures purement empiriques ou qu'on adopte des procédures mathématiques.



On donne un rectangle ABCD.
Est-ce que l'aire du rectangle ACEF *est supérieure, égale ou inférieure à l'aire du rectangle* ABCD *?*
Expliquez votre réponse.

Figure 1. Premier type de problème : comparaison d'aires

Pour résoudre ce problème, on peut mettre en œuvre trois procédures différentes.

1.1.1. Une procédure purement empirique

Les mesures avec une règle graduée (décimètre) conduisent à des valeurs à une seule décimale. Ainsi, en 5^{e} et en 4^{e}, la majorité des élèves a procédé ainsi (Jam, 1980) :

Largeur [de ABCD] AB = 2,5 cm et Longueur [de ABCD] AD = 5 cm,
AF = 2,3 cm et AC = 5,5 cm.
Donc, l'aire de ACEF (12,65 cm^2) *est supérieure à celle* de ABCD (12,50 cm^2).

Si l'on acceptait comme justes les mesures faites pour AB et AD, c'est-à-dire 2,5 et 5 cm, on pourrait déduire la valeur 5,483 comme mesure approchée de la diagonale et ne pas se limiter à la valeur 5,5 qui avait été mesurée sur le dessin. Et si l'on prenait deux ou trois décimales pour mesurer AB et AD, on obtiendrait pour l'aire de ACEF des valeurs qui se rapprochent de celle du rectangle ABCD :

$2{,}28 \times 5{,}483 = 12{,}50124$ ou $2{,}279 \times 5{,}483 = 12{,}495$ (au lieu de $2{,}3 \times 2{,}5 = 12{,}65$!)

En fait, comme il est impossible de lire une deuxième décimale, encore moins une troisième, sur une règle graduée, *le fait de s'en tenir à une procédure uniquement empirique* de mesure de tous les côtés (largeur, longueur et la diagonale commune aux deux rectangles) *conduit à affirmer que* le rectangle ACEF est plus grand que le rectangle ABCD. Cela semble d'ailleurs perceptivement évident : la diminution de la largeur (côté CE) ne compense pas l'augmentation de la longueur (côté AC).

1.1.2. Une réorganisation purement visuelle des unités 2D

On effectue visuellement une *reconfiguration* des différentes unités visuelles de dimension 2 (2D) dont la juxtaposition constitue la figure de départ, c'est-à-dire la figure associée à l'énoncé.

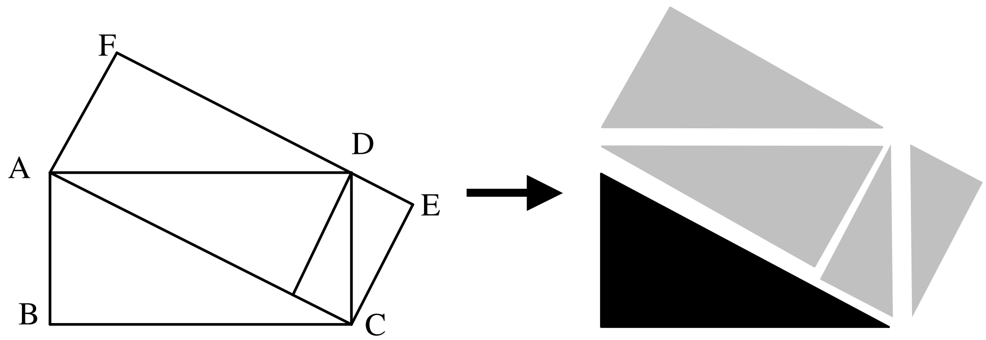


Figure 2. Décomposition en unités figurales 2D

L'égalité des deux aires devient alors évidente, *alors que les deux rectangles ne sont pas superposables* puisque leurs côtés respectifs n'ont pas les mêmes longueurs.

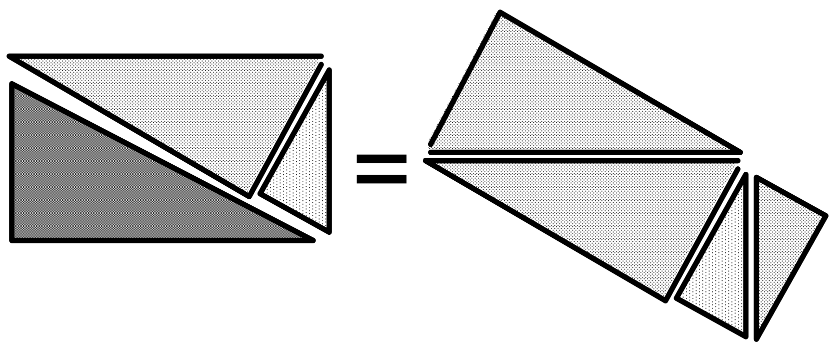


Figure 3. Procédure de calcul qualitatif purement visuel

L'égalité ci-dessus résulte de l'égalité entre un grand triangle rectangle et sa reconfiguration à partir de deux petits triangles rectangles (partie gauche de la figure 3). On voit tout de suite la différence entre cette procédure figurale de reconfiguration et la procédure purement empirique. Les reconfigurations qui permettent de comparer les aires des deux rectangles *laissent invariantes les unités visuelles de la figure de départ.*

1.1.3. L'utilisation d'une propriété géométrique

On peut aussi *raisonner verbalement en se référant à l'une des propriétés* des rectangles en tant que parallélogramme : une diagonale partage un rectangle en deux parties égales. Dans ce problème, la propriété doit être utilisée trois fois : pour comparer les deux rectangles désignés dans l'énoncé mais aussi, pour comparer les triangles rectangles qui forment les deux rectangles plus petits, juxtaposés en FECA. Or cette dernière application n'est pas du tout évidente. *Elle présuppose que le regard se focalise sur ces deux petits rectangles et non pas sur les deux grands qui sont visuellement au premier plan.* Autrement, les côtés AD et DC du rectangle ABCD ne peuvent pas être vus comme étant aussi les diagonales des petits rectangles juxtaposés en FECA !

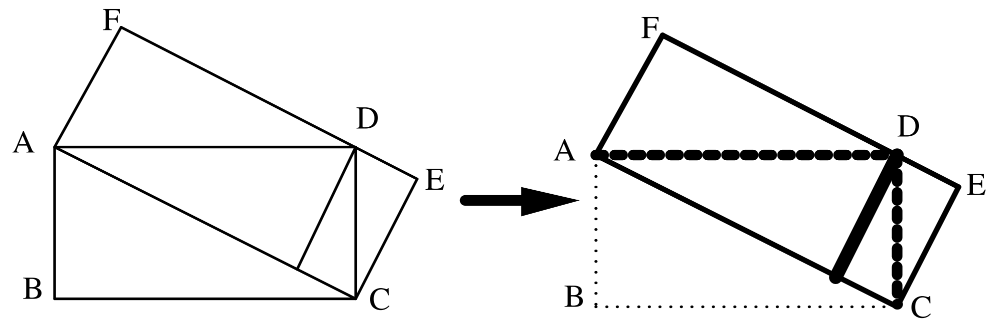


Figure 4. Procédure de raisonnement par application d'une propriété.

Cette procédure pourrait être considérée comme étant la formulation de la procédure par réorganisation visuelle. En est-elle une description ou une justification ? En fait, de l'une à l'autre il y a un saut. La procédure précédente (Figure 3), qui portait sur des manipulations d'unités visuelles 2D, peut être réalisée matériellement et ne présuppose en rien la connaissance de la propriété. Celle-ci, qui porte sur des unités visuelles 1D, ne peut pas être réalisée matériellement et présuppose la connaissance de la propriété (Duval 2005, p. 41-42). En outre, l'utilisation explicite d'une propriété suppose une coordination entre la visualisation et le raisonnement qui est rarement réalisée chez les élèves, car une telle coordination repose sur cette étrangeté mathématique qu'est la déconstruction dimensionnelle des formes.

Le deuxième type de problème, qui ne porte pas sur des grandeurs mais seulement sur des propriétés affines, exclut tout recours à des procédures empiriques de mesure et à des calculs.

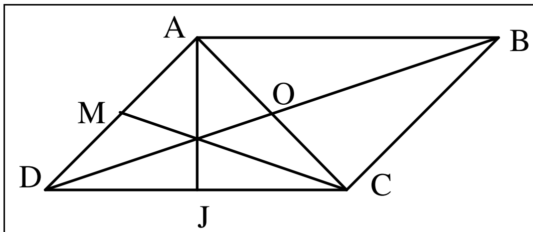
	ABCD *est un parallélogramme de centre* O. M *et* J *sont les milieux respectifs des segments* (AD) *et* (DC). *Démontrer que les droites* AJ, CM *et* BD *sont concourantes.*

Figure 5. Deuxième type de problème : intersections et alignements

Ici, la demande d'une preuve apparaît bien paradoxale puisque ce qui est à prouver se voit tout de suite sur la figure. Il peut y avoir cependant deux procédures pour justifier ce qui se voit.

1.1.4. Une procédure instrumentale de construction

La construction de la figure à l'aide d'instruments conduit automatiquement à ce résultat visuel. Car si les contraintes propres aux instruments choisis pour la construction imposent un certain ordre dans les opérations de construction, ils assurent également la constance des tracés effectués. Appelons P le point d'intersection des droites AJ et CM. On ne peut pas, en utilisant une règle, tracer la diagonale DB de telle façon qu'elle ne passe pas par P.

1.1.5. Un raisonnement déductif appliquant des théorèmes

Ici, le théorème, heuristiquement important, est que les trois médianes d'un triangle concourent. Il suffit de montrer que les trois segments (AJ), (CM) et (BD) sont les trois médianes du triangle ACD. Cela est immédiat pour les segments (AJ) et (CM), mais l'établir pour le segment (BD) demande qu'on utilise une des propriétés du parallélogramme.

1.2. Quelles procédures peuvent avoir valeur et force de preuve ?

1.2.1. D'un point de vue mathématique

La procédure mathématique attendue pour le premier problème était l'utilisation de la propriété géométrique du partage des rectangles en deux parties égales par l'une de leurs diagonales (§ 1.1.3). Le second problème est donné comme exemple dans le chapitre qui porte sur la démonstration d'un manuel (Deledicq et al., 1988).

La procédure de résolution par une réorganisation visuelle (§ 1.1.2) est aussi présentée comme une preuve, mais le plus souvent en réaction à l'introduction aveugle du raisonnement déductif, ou dans une perspective historique.

En revanche, la procédure empirique (§ 1.1.1) ne permet pas de valider un résultat d'un point de vue mathématique. Or, cela n'a rien d'évident, et c'est même inexplicable à celui qui n'est pas déjà entré dans la compréhension du fonctionnement d'une preuve en mathématiques. Le fait que des procédures empiriques conduisent parfois à des réponses contradictoires peut-il apparaître suffisant pour les exclure de tout processus de validation mathématique ?

Il reste enfin la procédure instrumentale de construction (§ 1.1.4), sur laquelle nous reviendrons plus loin. Mais pour tout ce qui concerne les propriétés affines, cette procédure est ambiguë, car celui qui s'en tient au seul résultat ne peut que s'appuyer sur un pur constat visuel : les trois droites se coupent en un seul point. Mais qu'en serait-il s'il existait deux points d'intersection si proches qu'ils seraient visuellement indiscernables ?

1.2.2. Du point de vue des élèves

C'est là que toutes les difficultés, bien connues des enseignants, apparaissent. Tout semble fonctionner à l'envers pour les élèves. Ce qui a valeur de preuve d'un point de vue mathématique n'a aucune force de preuve pour la grande majorité des élèves. En d'autres termes, les preuves mathématiques ne fonctionnent pas comme des preuves et n'ont donc aucun pouvoir propre de conviction. Les sources de conviction viennent des procédures de contrôle ou de vérification empirique. Et en géométrie, les procédures empiriques de résolution et de justification sont de l'ordre du constat visuel immédiat.

Or même si l'on s'en tient à des procédures mobilisant des représentations visuelles, le seul examen des deux problèmes pris comme exemples ci-dessus fait apparaître des sauts ou des oppositions entre les différentes procédures qui font appel à la perception : les relevés physiques de mesures, les procédures instrumentales de construction de figures et les activités de reconfiguration analogues aux manipulations effectuées avec des pièces de puzzle (Figures 2 et 3 ci-dessus). Or, bien que les procédures de ce dernier type soient souvent avancées comme faciles (par exemple, pour trouver la somme des angles d'un triangle), elles deviennent très vite cognitivement complexes, car elles vont très souvent contre les processus spontanés de reconnaissance perceptive (Duval 1995a, pp. 144-150). En définitive, le constat perceptif immédiat reste prédominant pour beaucoup d'élèves, et c'est ce constat qui leur ouvre ou qui leur ferme le choix des procédures selon les situations de problème proposées, et cela quel que soit le niveau d'enseignement.

1.2.3. Différents types de preuves dans une progression d'enseignement ?

Le fossé entre ces deux points de vue a conduit à distinguer plusieurs types ou niveaux de preuve. Il s'agit alors de pouvoir privilégier ceux qui peuvent être proposés aux élèves, quitte à abandonner les autres. Mais on peut aussi chercher une progression didactique, en partant de ceux que les élèves adoptent d'eux-mêmes comme procédure de « validation », pour aller jusqu'aux démonstrations mathématiques. Ainsi, N. Balacheff a distingué quatre types de preuves : l'empirisme naïf, l'expérience cruciale, l'expérience générique et l'expérience mentale (1987, pp. 163-166 ; 1988, pp. 55-59). Ces quatre types de preuve, qui correspondent à des formes de « rationalité » différentes, ne sont pas propres aux mathématiques, mais elles prépareraient les élèves à la démonstration, laquelle consiste en « ... la déduction (d'un énoncé à partir) de ceux qui le précèdent à l'aide d'une règle de déduction prise dans un ensemble de règles bien défini » (1987, p. 148). Dans cette approche, la démonstration devient « une forme particulière » de preuve parmi d'autres, bien qu'on doive rappeler qu'elle est la seule « qui puisse être acceptée dans la communauté mathématique ». Mais, quelqu'en soit le motif, toute distinction de plusieurs types de preuve soulève deux problèmes fondamentaux, tant d'un point de vue cognitif que d'un point de vue didactique.

Le premier problème porte sur ce qu'il y a de commun entre les différents types de preuve qu'on distingue : qu'est-ce qui fait qu'une preuve est une preuve, quelqu'en soit le type ? En d'autres termes, qu'est-ce qui en constitue l'élément décisif ?

Le deuxième problème porte sur ce qui différencie les types de preuve. D'un type de preuve à un autre, y a-t-il ou non rupture entre leurs modes cognitifs respectifs de fonctionnement ? En d'autres termes, les élèves peuvent-ils d'eux-mêmes passer d'un type à un autre ; et sinon, comment leur faire découvrir cet autre type de preuve auquel on veut leur donner accès ?

2. QU'EST-CE QUI FAIT QU'UNE PREUVE EST UNE PREUVE ?

Cette question n'a rien de théorique. Elle est au cœur des débats que l'enseignement de la géométrie soulève, mais elle est souvent posée sous une forme négative : pourquoi les démonstrations ne s'imposent-elles pas comme des preuves pour les élèves ? Cela conduit à analyser les preuves sous le seul angle de l'effet qu'elle devraient automatiquement produire : la conviction (Barbin, 1988). Et cela fait aussi oublier le lien étroit des preuves et de la rationalité. Poser la question sous une forme positive, c'est au contraire se demander ce qui, dans une preuve, est *la cause* de cet effet de conviction qu'elle doit produire. Et on retrouve là la réponse classique d'Aristote à Leibniz.

Quelque chose fonctionne comme preuve pour quelqu'un lorsque cela lui *fait prendre conscience de la nécessité ou de l'impossibilité* d'une affirmation avancée comme une conjecture (en mathématiques) ou une hypothèse (en dehors des mathématiques), comme une éventualité (dans une discussion pour une prise de décision). Il y a donc autant de types de preuves qu'il y a de types d'expériences conduisant à cette prise de conscience de la nécessité, et par conséquent de types de nécessité.

2.1. Preuve, expérience de la nécessité et science

Le lien entre preuve et prise de conscience de la nécessité d'une affirmation est au fondement même de l'idée de science. C'est à partir de ce lien que la science s'est trouvée distinguée et opposée aux autres formes de connaissance, même si la mise en évidence de ce lien s'est d'abord faite en référence à un type particulier de preuve, les démonstrations mathématiques. Ainsi, Leibniz décrit les démonstrations comme *une expérience* (déductive) *conduisant à la prise de conscience de la nécessité* (d'une proposition).

> *La démonstration est un raisonnement par lequel une proposition devient certaine. Ce qui arrive chaque fois qu'on montre de quelques suppositions (qui sont posées comme assurées)* que celle-la s'ensuit nécessairement. *Nécessairement, dis-je, c'est-à-dire de manière que le contraire implique contradiction, ce qui est le véritable et unique signe de l'impossibilité* (Leibniz, 1969, p. 51)[1].

Leibniz n'a fait que reprendre l'idée exposée dans l'ouvrage où, pour la première fois, la science s'est trouvée nettement distinguée des autres formes de connaissance : les *Seconds Analytiques*. Rappelons-en le passage bien connu, qui ne fait référence à aucun type de preuve :

> *Nous pensons connaître quelque chose au sens absolu, et non pas de manière sophistique, lorsque nous pensons connaître la cause en vertu de laquelle ce quelque chose est, en sachant qu'elle en est la cause et que* comme effet il ne peut pas être autrement *qu'il n'est* (Aristote, 2005, 71b 9-12).

On n'a souvent retenu de ce passage que l'aspect « explication », qui est associé à la notion de cause et de « pourquoi ? », en oubliant l'autre aspect, celui de la relation des effets aux causes. Or c'est sur cette relation que porte « la conscience de la nécessité qui caractérise la science... [et] c'est par là qu'elle atteint la certitude et s'élève au-dessus de la connaissance empirique, de l'opinion vraie » (Moreau, 1962, p. 40).

Ce serait une erreur de croire que ce sont là des considérations théoriques éloignées des préoccupations didactiques et pédagogiques. Le « sentiment de nécessité » a été le critère que Piaget a choisi pour analyser le développement de l'intelligence de l'enfant (1967, p. 186-188) et pour décrire la construction cognitive des concepts fondamentaux qui rendent l'expérience intelligible. Ainsi, *c'est la prise de conscience de la nécessité qui caractérise l'émergence des conservations chez l'enfant et qui en fait le sens à ses yeux.* Dans un ouvrage, publié la même année (1941) que celui sur *La genèse du nombre* et qui d'ailleurs en fournit les clés psycho-épistémologiques, Piaget écrit :

> *On peut invoquer à cet égard, lors de l'acquisition définitive de chaque invariant* [...] *l'apparition d'un sentiment de nécessité a priori qui fait contraste avec tout le phénoménisme de la non-conservation ou avec les hésitations des stades intermédiaires :*

[1] Leibniz condense ici l'analyse qu'il avait longuement développée dans sa lettre à Conring, du 19 mars 1678 (Leibniz, 1972, pp. 121-124).

> *cette conscience de la nécessité chez l'enfant, comme science déborde l'expérience et atteste l'intervention de la déduction* (Piaget, réédition de 1962, p. 137).

Ainsi la certitude et la conviction propres à un savoir scientifique apparaissent-elles seulement comme des conséquences de la prise de conscience d'une nécessité. Et cette prise de conscience soit de la nécessité, soit d'une impossibilité, crée une *conviction* plus forte que toutes celles qu'on pouvait avoir antérieurement. Une preuve ne fonctionne comme preuve que lorsque les individus peuvent faire l'expérience de la nécessité sur laquelle elle repose.

2.2. Différents types de nécessité et différents types de preuve

Trop souvent, lorsqu'on parle de nécessité, on oublie que la nécessité n'est pas une modalité homogène, parce que les manières dont elle se découvre et dont on en prend conscience sont variées. Ainsi, par exemple, le type de nécessité rencontré en mathématiques n'est pas le même que celui rencontré dans les autres disciplines scientifiques. En mathématiques, on travaille en référence à l'ensemble de tous les cas possibles, c'est-à-dire tous ceux qu'on peut non seulement concevoir mais aussi construire ; tandis qu'en dehors des mathématiques, on travaille à partir des données qu'on enregistre instrumentalement, des échantillons qu'on a recueillis, des « occurrences » effectivement observées ! Cela se traduit par des pratiques intellectuelles divergentes. En mathématiques, la recherche d'un contre-exemple est un réflexe professionnel majeur. En dehors des mathématiques, la recherche de données, d'occurrences, c'est-à-dire d'indices empiriques prenant valeur d'exemple d'existence, ainsi que l'invention de dispositifs permettant de les capter, sont au contraire la préoccupation majeure. Les types de nécessité qui s'imposent ainsi ne sont donc pas de même nature. On doit les distinguer. Il y en a aussi un troisième, totalement différent de ces deux types, bien qu'on ait été souvent tenté de le réduire aux précédents. Pour désigner les deux premiers types de nécessité, nous garderons la terminologie de Leibniz.

2.2.1. Une nécessité « logique, métaphysique ou géométrique »

C'est celle dont on prend conscience dans la démonstration et c'est celle qui a longtemps servi de modèle pour le développement de la rationalité scientifique, comme en témoignent non seulement les textes de Leibniz, mais aussi la description cartésienne de « la méthode des géomètres », qui est faite dans la *Logique ou l'art de penser* de Port-Royal (1664), ou encore le célèbre « *more geometrico demonstratae* » de Spinoza (1663). L'expérience qui conduit à l'expérience intellectuelle de la nécessité est la production d'un dérivation déductive valide de propositions, la validité de la déduction étant intrinsèque à son mode de production. *La prise de conscience de cette nécessité est interne à des opérations discursives de pensée, quelque soit le système de représentation sémiotique utilis*é, *mais en mobilisant un* (infra, § 3.2.2). Évidemment, c'est ce type de démarche dont l'introduction dans l'enseignement des mathématiques fait problème.

2.2.2. Une nécessité « physique »

Leibniz, songeant aussi bien aux travaux de Galilée qu'à ceux de Newton, la décrit ainsi : « Cette nécessité physique est ce qui fait l'ordre de la nature et consiste dans les règles du mouvement et dans quelques autres lois générales qu'il a plu à Dieu de donner aux choses en leur donnant l'être » (Leibniz, 1969, p. 51). Ce sont des dispositifs expérimentaux permettant des observations reproductibles, et faisant appel à une instrumentation de plus en plus puissante et techniquement complexe, qui conduisent à la découverte de ce type de nécessité. Il se distingue du précédent en ce qu'il ne dépend d'aucune manière des opérations discursives de la pensée. Il se découvre de manière externe et indirecte à partir de l'observation de régularités et d'impossibilités de fait. D'une certaine manière, la nécessité physique est une nécessité contingente propre à tout ce qui arrive au moment même où cela se produit (Aristote 1969, 19 a 23-27). C'est celle d'un « état de fait ».

2.2.3. Une nécessité socio-normative

Ce type de nécessité est celui qui est lié à toute forme de socialisation ou d'intégration dans une communauté. Il porte à la fois sur des règles de fonctionnement des interactions sociales et sur l'adoption de solutions et de décisions communes, au terme d'un débat. Par exemple, le principe de non contradiction a d'abord été dégagé comme l'une des quatre *règles dialogiques*[2] *assurant à la parole une crédibilité intrinsèque,* avant d'avoir été réduit à un simple principe logique : ce que vous dites dans un échange ne peut pas contredire ce que vous avez énoncé antérieurement sur le même sujet. Autrement la parole*, pour celui qui vous écoute*, est une parole vide de tout sens et ne dit absolument rien (Aristote 1974, Γ 1006a 18-24 ; 1008a 30-32). La non contradiction est *une nécessité pour le locuteur* s'il veut continuer d'être écouté. Le « respect » de cette nécessité qui se présente comme une exigence, limite dans une discussion la versatilité de ses affirmations ou de ses réfutations au gré des contextes et du jeu de la réplique. En ce sens « la valeur du principe de contradiction n'est pas d'ordre logique mais d'ordre pratique et éthique » (Lukasiewicz, 2000, p. 168)[3].

Plus globalement, toute approche mettant l'accent sur le lien étroit entre le dialogue, le débat et le développement de la raison (*λογος* [logos] et non pas *ratio*) est ancrée sur l'expérience d'une nécessité socio-normative pour pouvoir résoudre un conflit. Et Piaget (1924 ; 1932) a fondé sur elle son premier modèle du développement de la logique chez l'enfant, modèle centré sur le passage de l'égocentrisme à la socialisation.

Cette approche privilégiant le lien entre nécessité socio-normative et rationalité ne s'est imposée que de manière récente dans les problématiques didactiques. Piaget l'avait vite abandonnée au profit des deux premiers types de nécessité, en élaborant un deuxième modèle centré sur les opérations intellectuelles et sur la genèse des concepts généraux qui structurent l'expérience du monde (nombre, temps, mouvement, vitesse, hasard...). On sait que c'est ce modèle opératoire qui a servi de référence à la problématique du

[2] Les trois autre règles dialogiques de la parole sont l'alternance des positions dans l'interaction verbale, la réciprocité des exigences avancées et la sincérité dans l'expression. L'alternance des positions a été explicitée par Platon : chacun doit être « tour à tour interrogeant et interrogé... réfutant et réfuté... » (Gorgias, 462 a). La réciprocité des exigences et la sincérité dans l'expression (et non pas la vérité de l'expression qui peut être l'objet de recherche ou de discussion) sont des règles éthiques. Elles ont été formulées, entre autres, par Kant (1985, pp. 261-263) et Lacroix (*Le sens du dialogue*).

[3] Pour souligner la valeur éthique du principe de contradiction, qu'on ne peut pas fonder, Lukasiewicz se place dans une position d'interaction verbale différente de celle adoptée par Aristote : c'est *la seule manière pour un interlocuteur de convaincre le locuteur, ou le déclarant,* « d'erreur ou de mensonge », dans une situation de désaccord. C'est cette position qui est également adoptée par J. B. Grize (1983) dans l'étude des stratégies de mise en contradiction lors d'une argumentation.

constructivisme jusque vers les années 1985. Puis, avec la découverte de Vygotski (qui avait développé sa théorie en réaction au premier modèle de Piaget mais aussi dans son prolongement) et avec les approches socio-cognitives du développement intellectuel, il y a eu une remise au premier plan de la nécessité socio-normative dans les problématiques didactiques. La nécessité socio-normative qui assure la cohésion des groupes et le fonctionnement des interactions sociales produit, au terme des débats, une nécessité consensuelle.

La définition générale de la preuve, proposée par N. Balacheff, s'inscrit dans cette approche : « nous appelons preuve une explication acceptée par une communauté donnée à un moment donné. Cette décision peut-être l'objet d'un débat dont la signification est l'exigence de déterminer un système de validation commun aux interlocuteurs » (1987, p. 148). Dans ces conditions, considérer les démonstrations mathématiques comme une « forme particulière de preuve » parmi d'autres ne reviendrait-il pas à subordonner, voire même à substituer la nécessité socio-normative à la « nécessité logique, métaphysique ou géométrique » ? Mais à l'inverse, considérer que l'expérience de la nécessité « logique ou géométrique » entraînerait l'assentiment aux règles et aux normes d'une société, et donc considérer que la conscience éthique ou citoyenne découlerait de la rationalité, ne procéderait-elle pas de la même assimilation ou de la même réduction ?

En tout cas, la prise de conscience de chacun de ces types de nécessité se fait par des démarches qui leur sont propres et elle détermine trois types de preuves totalement différents. Nous pouvons alors revenir à notre question sur les procédures qui peuvent avoir valeur et force de preuve en mathématiques (voir § 1.2), et la reformuler ainsi : peut-il y avoir en mathématiques, indépendamment des démonstrations, des preuves expérimentales, c'est-à-dire des preuves faisant faire l'expérience d'une nécessité « physique » ? L'opposition entre ce qui est visuel et ce qui est langage, entre des manipulations concrètes et l'hypothético-déductif, qui est à l'origine de beaucoup des problèmes que pose l'enseignement de la géométrie, commande d'examiner cette question avec attention.

2.3. Y a-t-il en mathématiques des expériences de nécessité « physique » ou empirique ?

Revenons à la variété des procédures de résolution des deux problèmes mathématiques présentées plus haut (§ 1.1). Certaines procédures sont centrées sur les données visuelles de la figure et elles peuvent soit en rester à des constats perceptifs directs, soit mobiliser une réorganisation visuelle de la figure, ou sa construction à l'aide d'instruments. D'autres partent des propriétés formulées pour en expliciter de nouvelles en utilisant des définitions ou des théorèmes. *Ces différentes procédures de résolution relèvent donc de types d'activité cognitive différents.* Non seulement la solution obtenue n'a pas la même valeur d'un point de vue épistémologique, mais chacune possède son propre mode de contrôle et constitue ainsi une source indépendante de conviction. Comment alors situer ces différentes procédures de résolution par rapport aux trois types d'expérience de nécessité que nous venons de distinguer ?

Registre	Représentations visuelles		Opérations discursives ou actes de parole	
Type de nécessité	EMPIRIQUE (**évidence** de la perception)	PROCÉDURALE (**nécessité** de type physique)[4]	THÉORIQUE (**nécessité** logique ou géométrique)	SOCIALE (**nécessité** normative)
STATUT ÉPISTÉMOLOGIQUE	**CONSTAT perceptif ou lecture directe** (lecture sur un instrument de mesure)	**RÉSULTAT** d'une procédure de **construction instrumentée** ou d'une **reconfiguration** des parties de la figure de départ	**DÉMONSTRATION** (utilisation de définitions et de théorèmes à partir d'hypothèses)	**NORME COMMUNE** ouvrant un espace de dialogue et de coopération non conflictuelle avec les autres
SOURCE COGNITIVE DE LA CERTITUDE	***SUPERPOSITION*** d'un coup d'œil, à l'aide d'un gabarit ou ***COMPARAISON*** des valeurs numériques obtenues par lecture directe	***INVARIANCE*** du résultat de l'enchaînement des opérations de construction, ou ***INVARIANCE*** des unités figurales des parties de la figure de départ dans la transformation figurale	***RAISONNEMENT VALIDE*** dont toutes les dérivations sont localement **nécessaires** et dont la continuité globale est sémiotiquement assurée	***CONSENSUS*** sur "……" se dégageant au terme de discussions ou de débats conduisant à son adoption plus ou moins explicite

Figure 6. Procédures de résolution, types de preuve et sources de conviction

Ces quatre types de fonctionnement cognitif, qui peuvent être observés ou « théoriquement » attendus par les enseignants dans les activités géométriques proposées en classe, vont nous permettre de comprendre les possibilités ou impossibilités de passage d'un type de procédure à un autre et d'un type de preuve à un autre.

2.3.1. Analyse des différentes procédures de résolution

La procédure de résolution empirique (§ 1.1.1) est un simple constat obtenu par lecture directe d'une mesure sur une graduation sans subdivisions. La procédure de résolution par une réorganisation purement visuelle des unités 2D (§ 1.1.2) est le résultat d'une double décomposition visuelle du rectangle ABCD, d'abord en deux triangles rectangles puis de ceux-ci en un grand et un petit sous-triangles rectangles, la décomposition du rectangle ACEF permettant d'obtenir le même nombre de grands et petits sous-triangles que pour le rectangle ABCD (Figure 3). Ce calcul qualitatif purement visuel repose évidemment sur l'invariance des parties mentalement ou matériellement déplacées. La procédure

[4] Nous regroupons sous la catégorie « nécessité physique » deux types de procédure différentes en relation directe avec les figures : les procédures utilisant des instruments (compas, règle) ou des logiciels (par exemple Cabri-géomètre) et les réorganisations visuelles de figures à des fins heuristiques avec un apport éventuel de nouveaux tracés. Les premières imposent une déconstruction dimensionnelle des formes (figures planes ou solides) en unités visuelles 1D ou 0D. Les secondes s'en tiennent aux seules unités visuelles 2D ou 3D, qui sont simplement décomposables en d'autres unités visuelles 2D ou 3D. Le discours géométrique ne s'articule pas directement avec la réorganisation heuristique d'unités visuelles 2D ou 3D, il requiert une déconstruction dimensionnelle des formes 2D ou 3D en unités 1D ou 0D (Duval, 2005).

instrumentale de construction (§ 1.1.4), par les contraintes techniques de l'instrument utilisé, s'appuie sur la constance des tracés instrumentalement obtenus, ce qui ne peut être le cas des dessins « à main levée ». De ce point de vue, *le calcul qualitatif visuel et la construction instrumentée constituent deux expériences de nécessité physique* en mathématiques et elles se distinguent en cela d'une pure procédure empirique ou d'une « lecture sur le dessin ».

Le raisonnement déductif est une démonstration dans la mesure où il s'agit d'un raisonnement valide appliquant des théorèmes (§ 1.1.5). Le cas de la procédure de résolution par utilisation d'une propriété géométrique (§ 1.1.3) est plus ambigu. Celle-ci peut apparaître plus simple que la raisonnement déductif, souvent considéré comme plus « formel ». Mais n'en est-elle pas une contraction, et sa mise en œuvre ne présuppose-t-elle pas justement une compréhension de ce que le raisonnement mathématique a de spécifique dans l'utilisation des théorèmes ?

On peut imaginer l'organisation d'un débat en classe à partir des productions contradictoires des élèves, qui auront été majoritairement obtenues par des procédures purement empiriques, plus quelques-unes obtenues selon d'autres procédures. La conduite du débat est évidemment supposée produire un consensus, c'est-à-dire faire faire l'expérience d'une nécessité, mais elle sera alors d'un autre type. Ce qu'on appelle la phase « d'institutionnalisation » en souligne d'ailleurs bien le caractère social !

2.3.2. Les deux problèmes des procédures fondées sur une nécessité de type physique ou technique

D'un point de vue mathématique, ces procédures ne prouvent pas même si elles sont fortement convaincantes. En effet, elles se heurtent à deux types de limitation. La première limitation est celle des seuils de discrimination perceptive. Il suffit ici d'évoquer la décomposition d'un rectangle en parties, proposée par Lewis Caroll, et sa reconfiguration en autre rectangle qui permet de montrer que 64 = 65[5]. La seconde limitation est celle des possibilités techniques des instruments utilisés. Nous pouvons ici citer deux exemples.

Il y a la première proposition des *Éléments* d'Euclide, qui vise à prouver la possibilité de construire un triangle équilatéral ayant pour base un segment [AB] donné. La solution est connue : le point cherché est l'intersection des cercles de centre A et B, et de rayon [AB]. Mais cela revient à admettre que par une construction instrumentée, les cercles « s'entrecoupent ». C'est là un constat qu'on peut toujours faire si l'on utilise pour tracer la figure une règle et un compas, c'est-à-dire en restant dans un ordre de grandeur très petit pour le segment [AB]. Or Hilbert, dans ses *Grundlagen der Geometrie*, a souligné qu'il fallait montrer l'existence de ce point d'intersection, c'est-à-dire la nécessité du fait que les cercles s'entrecoupent. Avec Cabri-géomètre, il est possible de construire un quadrilatère dont une diagonale mesure 17 cm et dont les quatre côtés ont 12 cm pour longueur. Le logiciel affiche alors des angles de 90°. Ce quadrilatère est-il un carré ? (F. Pluvinage[6]) On pourrait multiplier les exemples. Cela revient à dire que des procédures de ce type, fondées sur une expérience de nécessité physique ou technique, présentent deux caractéristiques :

[5] Pour une analyse des facteurs d'appréhension visuelle opératoire des procédures dans les cas qui marchent et dans ceux qui sont des contre-exemples, nous renvoyons au travail de Padilla Sanchez (1992).
[6] Communication personnelle.

- L'expérience de nécessité à laquelle elles donnent lieu est *l'expérience d'une impossibilité de réussite si on ne suit pas* une « procédure qui marche », car autrement « on ne peut pas y arriver ». Ici, ce n'est pas une expérience directe de nécessité mais seulement une expérience indirecte.
- Les résultats obtenus se limitent à un ensemble restreint, et souvent stéréotypé, de situations problèmes qui privilégient l'observation de certaines données visuelles ou des vérifications numériques.

Le deuxième problème des preuves fondées sur une expérience de nécessité physique est celui de leur ouverture, ou de leur fermeture, aux preuves fondées sur une nécessité logique. L'intérêt didactique d'accepter certains types de preuves empiriques est évidemment de les intégrer dans une progression qui amène pas à pas les élèves aux démonstrations mathématiques. Mais les élèves peuvent-ils passer d'un type de preuve à un autre, surtout lorsque leurs modes de fonctionnement sont radicalement différents ? Certes, pour favoriser ce passage, on cherche à mettre en place des situations d'échanges et de discussion au cours desquelles les élèves ont à produire et à confronter des arguments à l'appui d'une conjecture, c'est-à-dire d'une « hypothèse » au sens expérimental du terme. Mais le passage d'une situation d'argumentation et de contre-argumentation dans un débat, à un raisonnement intrinsèquement valide représente un changement complet dans la manière spontanée de justifier et de raisonner. Les élèves peuvent-ils d'eux-mêmes prendre conscience du changement exigé ?

Presque toujours, entre preuves empiriques, situations d'argumentation conduisant à un consensus et démonstrations mathématiques, on admet une continuité. Mais il ne s'agit que d'une continuité purement fonctionnelle : tous ces types de preuves entraînent la conviction. Structurellement, il n'y a rien de commun dans leurs fonctionnements respectifs. *C'est pourquoi les démonstrations mathématiques ne peuvent être convaincantes, et donc prendre force de preuve, que pour ceux qui en comprennent le mode de fonctionnement spécifique.* Les preuves empiriques et les situations d'argumentation ne préparent pas aux démonstrations mathématiques, tout simplement parce que leur fonctionnement est différent et qu'elles ne leur sont pas hiérarchiquement subordonnées. Elles renvoient à des domaines de connaissance différents et les types de nécessité dont elles permettent de faire l'expérience ne portent pas sur les mêmes objets ou sur les mêmes phénomènes. On ne peut pas s'attendre à ce que la très grande majorité des élèves entre dans des démarches mathématiques de démonstration si on ne prend pas le temps de leur faire prendre conscience de ce que le fonctionnement des raisonnements déductifs valides a de vraiment spécifique.

3. D'UNE SOURCE DE CONVICTION À UNE AUTRE : COMMENT FAIRE PRENDRE CONSCIENCE DU FONCTIONNEMENT DE « DÉDUCTIONS » VALIDES ?

C'est le seuil de la rationalité mathématique. La compréhension du fonctionnement d'un raisonnement déductif valide est la condition nécessaire pour pouvoir utiliser, de manière heuristique ou démonstrative, des définitions et des théorèmes. Cette compréhension commande celle de l'originalité des définitions mathématiques et des théorèmes. Et non pas l'inverse !

3.1. Un raisonnement déductif valide est-il « formel » ?

Il faut s'arrêter tout d'abord sur l'objection souvent faite à l'initiation aux raisonnements déductifs valides pour comprendre les démonstrations : le raisonnement déductif valide serait l'aspect « formel » des démonstrations. Et ici, « formel » peut prendre deux sens différents. Soit on considère comme formel tout ce qui relève d'un langage et que l'on oppose à ce qui se voit ou à ce que l'on manipule sur une figure, sur un graphe, etc. Soit on considère comme « formel » la mise en forme verbale d'une solution après la découverte des théorèmes ou des propriétés à utiliser pour résoudre un problème : dans les deux cas dire « formel » résonne comme un jugement sans appel qui laisse entendre que le raisonnement déductif n'interviendrait qu'après la réflexion et n'apporterait rien d'essentiel à la compréhension mathématique. Aussi, vouloir l'introduire dans l'enseignement serait inutile et didactiquement contre-productif. Cette objection et sa reprise quasi systématique, dans les débats didactiques, sont pour le moins surprenantes.

3.1.1. Quels rapport entre mots (termes de propriété), énoncés (définitions, théorèmes) et raisonnement déductif en mathématiques ?

L'opposition entre ce qui relève d'un langage et ce que l'on voit ou ce que l'on manipule sur une figure va à l'encontre de l'activité mathématique, dans laquelle la mise en évidence et l'utilisation de propriétés jouent un rôle essentiel.

Le recours à un propriété relève toujours d'un énoncé, même si cet énoncé se trouve ensuite abrégé en un mot. L'abréviation d'un énoncé, définition ou théorème, en un terme de propriété, n'est pas un effacement du langage, car le sens d'une abréviation reste dans l'énoncé qu'elle rend seulement implicite. Ainsi, la procédure de résolution (§ 1.1.3) n'est accessible qu'à celui qui a compris le mode de fonctionnement de la procédure de résolution (§ 1.1.5). *Le raisonnement déductif n'est pas d'abord nécessaire pour les démarches de démonstration, mais pour la compréhension des énoncés, à commencer par les définitions*. Il y a, en mathématique, une circularité cognitive entre définition et raisonnement déductif : l'élaboration des définitions se fait par rapport à l'utilisation déductive qui en sera faite (Duval 2005, pp. 37-38). Coupées de cette pratique du raisonnement déductif, les définitions mathématiques, et donc les termes de propriétés qui les abrègent, n'ont plus de sens. Quant aux procédures de résolution par réorganisation visuelle d'une figure (§ 1.1.2) qu'on oppose au langage, par exemple pour établir la somme des angles d'un triangle, elles interviennent souvent comme une illustration ou comme une manipulation à faire pour comprendre un énoncé.

Opposer le langage comme étant inutilement redondant par rapport autres formes de représentations, plus directement accessibles, revient à écarter deux choses :

- c'est seulement par le langage qu'on s'affranchit de la particularité empirique d'un donné ou d'une activité, pour s'ouvrir à l'ensemble de toutes les possibilités ;
- les théorèmes, qui constituent la connaissance mathématique, sont des énoncés.

3.1.2. L'organisation didactique d'une activité de résolution mathématique de problèmes
Dans l'organisation d'une activité de résolution de problème en classe, il est classique de bien séparer deux phases : l'une, individuelle ou en groupe, de recherche suivie d'une mise en commun où l'on confronte ce qui a été trouvé ; l'autre de « rédaction », destinée à fixer pour la suite ce qui doit être retenu, en lui donnant généralement une forme mathématiquement plus reconnaissable. Et naturellement, tout le travail de compréhension mathématique est associé à la première phase, tandis que le raisonnement déductif ne serait qu'une mise en forme rédactionnelle. À la limite, on pourrait s'en dispenser. Et c'est là la grande illusion didactique : quand on a toutes les « propriétés » à utiliser, par exemple écrites au tableau après une discussion (orale), on « aurait » la démonstration. Pour l'enseignant ou le mathématicien, oui ! Pour la très grande majorité des élèves, non !

Pour voir où se situe l'illusion, regardons l'explication classique donnée dans un manuel qui est remarquable tant par la richesse des activités mathématiques proposées que par l'analyse qui y est faite de ce que sont les démarches mathématiques à mettre en œuvre dans une recherche. La phase de recherche y est décrite en ces termes : « commence par *essayer* ***de faire des déductions*** *à partir des hypothèses* (du problème) ». La phase de rédaction est introduite ainsi : « quand *tu auras* ***réussi à joindre les hypothèses à la conclusion*** (la cible visée lors de la recherche*)*, il te restera à *rédiger ta démonstration en français*. Ta rédaction doit être efficace et lisible » (Deledicq, 1988, p. 166). Autrement dit, ce sont les déductions qui permettent de joindre l'hypothèse à la conclusion, et on a toutes les déductions quand on a toutes les définitions ou théorèmes correspondants. Tout cela concerne la phase de recherche qui en classe, peut s'achever par une mise commun. La démonstration serait donc obtenue et il n'y aurait plus qu'à rédiger.

On peut faire deux remarques sur cette présentation de la phase de recherche de la démonstration. On y distingue *implicitement deux niveaux de raisonnement*, celui des déductions locales qu'on peut faire et celui de la jonction des hypothèses du problème à la conclusion. Ensuite, on utilise la distinction entre hypothèse et conclusion comme une distinction familière. Or cette distinction porte sur le statut des propositions dans l'organisation déductive de plusieurs propositions et non pas sur leur contenu, c'est-à-dire sur ce qu'elles disent. Ce qui veut dire qu'ici, *le sens est d'abord donné par le statut et non pas par le contenu.* Mais on peut également se demander si la priorité du statut sur le contenu ne joue pas aussi à l'intérieur de chaque déduction locale.

Or, on peut toujours et partout constater que beaucoup d'élèves ne voient pas comment, à partir de toutes les propriétés, on peut « joindre » les hypothèses et la conclusion (Richard, 2004). *Cette incapacité, qui joue dès les phases de recherche, correspond au fait que beaucoup d'élèves ne savent pas faire des déductions locales*. Cela apparaît dans les erreurs systématiquement récurrentes : confusion entre hypothèses et conclusion, non distinction entre un théorème et sa réciproque, ou encore l'utilisation d'un théorème sans vérifier si ses conditions d'application sont remplies, d'où le recours à des théorèmes non pertinents dans le cadre du problème à résoudre.

3.3. Les points clés du fonctionnement d'un raisonnement déductif valide

L'organisation déductive de plusieurs propositions en un raisonnement valide conduisant à l'affirmation nécessaire d'une proposition représente une rupture par rapport à toutes les autres formes d'organisation discursive, comme par exemple celle des récits, celle des descriptions ou celle des explications. Cette rupture porte essentiellement sur deux points : la prise en compte du statut comme deuxième composante du sens des propositions, et l'existence de deux niveaux d'organisation discursive mettant en œuvre des opérations différentes.

3.2.1. Qu'est-ce qui constitue le sens d'une proposition ?

La réponse à cette question n'est pas simple. Une chose au moins est sûre : ce ne sont pas seulement les mots, puisque deux propositions comportant exactement les mêmes mots peuvent avoir des sens opposés. Or, malgré cette variation de sens entre une proposition et sa réciproque, c'est presque toujours dans ce qu'évoquent les mots, c'est-à-dire dans le contenu, qu'on cherche spontanément le sens des propositions, comme par exemple dans une explication. Mais le contenu est-il toujours la seule composante du sens d'une proposition ?

Le statut constitue la deuxième composante du sens des propositions et cette deuxième composante joue un rôle essentiel pour la compréhension de tous les énoncés mathématiques. Nous venons de voir la distinction entre hypothèses et conclusion, mais il y a aussi d'autres statuts aussi importants : définition, théorème, conjecture, conclusion intermédiaire... *Or, cette deuxième composante ne peut apparaître que dans l'organisation de plusieurs propositions en l'unité d'une même démarche discursive de pensée ou de connaissance*. Autrement dit, une proposition n'a de statut que par rapport à d'autres propositions et non pas prise isolément. C'est pourquoi la pratique pédagogique consistant à faire écrire et donc à associer le nom d'un statut à chaque proposition est une absurdité. Elle ne permet pas aux élèves de prendre conscience de cette deuxième composante de sens. On remarquera alors que le raisonnement déductif joue sur les différences de statuts des propositions qu'il oppose ou qu'il « enchaîne ». Au contraire, dans les descriptions ou dans les explications, le statut n'intervient pas parce que toutes les propositions sont supposées avoir le même statut.

Il existe une troisième composante de sens des propositions, que nous avons désignée par l'expression « valeur épistémique ». Une proposition ou une phrase prend pour celui qui la comprend, et à l'instant même où il la comprend, une valeur épistémique. Ce qui est énoncé lui paraît évident, absurde, plausible, invraisemblable... Naturellement, cette valeur dépend de la base de connaissances du récepteur. C'est pourquoi les énoncés en mathématiques n'ont souvent pas la même valeur épistémique pour les élèves et pour les enseignants. Cependant, le plus intéressant n'est pas là. Il tient au fait que *tout raisonnement, en mathématiques comme en dehors des mathématiques, vise à changer la* *valeur épistémique initiale d'une proposition en une autre valeur épistémique*[7] (Duval, 1995b). Ainsi, le raisonnement déductif valide montre la nécessité d'affirmer ce qui intuitivement peut apparaître impossible ou seulement possible. De même, l'argumentation vise à modifier la valeur épistémique qu'un interlocuteur attache à une déclaration, à une hypothèse ou même à un argument, sans nécessairement viser à en montrer la vérité : faire apparaître comme absurde ce qui apparaissait vraisemblable, ou au contraire faire apparaître comme plausible ce qui apparaissait comme irréel, etc. À la différence des autres disciplines, on associe, en mathématiques, la valeur logique de vérité à la seule valeur épistémique du « nécessaire ».

3.2.2. Les deux niveaux d'organisation des raisonnements déductifs

Il y a un premier niveau où le raisonnement organise des propositions en un pas de déduction. Et il y a un second niveau où le raisonnement n'organise plus des propositions mais des pas de déductions. Les opérations à effectuer changent d'un niveau à l'autre.

Les descriptions classiquement faites du raisonnement déductif ne retiennent que le deuxième niveau d'organisation, celui des pas de déduction en l'unité d'une preuve : « joindre les hypothèses (du problème) à la conclusion. » Le premier niveau d'organisation est tout juste mentionné dans la description de *la phase de recherche* par l'expression « faire des déductions », comme si l'utilisation de théorèmes ou de définitions allait de soi pour les élèves, alors que c'est celle qui donne lieu à une incompréhension totale qui n'est pas toujours immédiatement observable. C'est en effet à ce niveau que les propositions doivent être comprises en fonction de leur statut et non pas en fonction de leur contenu. En outre, ces deux niveaux sont souvent confondus par le recours au même connecteur « si..., alors... », pour des raisons d'économie ou d'abréviation. Or, il est absolument nécessaire que les élèves perçoivent bien les opérations spécifiques à chacun de ces niveaux :

– l'utilisation d'un théorème ou d'une définition (l'énoncé tiers par rapport aux prémisses et à la conclusion) pour « faire une déduction » requiert deux opérations : **vérifier** que les conditions d'applications du théorème sont bien remplies (par les hypothèses ou par la (les) conclusion(s) précédente(s)) et **détacher** la partie conséquence de l'énoncé tiers, comme conclusion du pas de déduction[8]. Les énoncés

[7] La fonction discursive commune à tout raisonnement est de modifier la valeur épistémique d'une proposition, lorsque cette valeur n'est pas la valeur « nécessaire ». Mais entre l'argumentation et le raisonnement déductif valide, il y a une discontinuité, qui tient au fait que leurs modes respectifs de fonctionnement sont radicalement différents. Par exemple, l'argumentation fonctionne sur le seul contenu des propositions, tandis que le raisonnement déductif fonctionne par rapport aux différents statuts des propositions. Dans l'un, les valeurs épistémiques sont rapportées à une seule dimension de sens, tandis que dans l'autre elles sont rapportées aux deux autres dimensions de sens. La discontinuité est structurale.

[8] On insiste parfois sur les similitudes de surface entre le fonctionnement de l'argumentation en dehors des mathématiques et le fonctionnement d'une démonstration en mathématiques. Ainsi Toulmin (1958) a proposé un schéma ternaire qui semble correspondre à l'organisation d'un pas de déduction. Cela n'a rien de surprenant puisqu'il est parti de la relation d'implication pour y introduire la possibilité de conditions restrictives ou de nuances modalisatrices (« qualifiers ») (op. cit., pp. 99-105). Mais ce schéma ne rend pas compte du fonctionnement d'un pas de déduction valide, car :

– le rapport entre les data et les « warrants » (énoncés tiers) n'est pas précisé et il n'y a pas d'opérations de vérification à faire ;

mathématiques utilisés comme énoncés tiers ont en effet cette particularité, par rapport aux arguments utilisés en dehors des mathématiques, d’être organisés explicitement ou implicitement selon une structure bipartite.

– La jonction de deux pas de déduction repose uniquement sur le fait que la conclusion de l’un des deux pas remplit l’une des conditions d’application de l’énoncé tiers de l’autre pas. La jonction de deux pas de déduction se fait par ce *recouvrement* : la conclusion d’un pas de déduction devient prémisse de l’autre pas. Naturellement cette opération de jonction par recouvrement conduit au développement de plusieurs lignes de déductions en parallèle. Ici apparaît une organisation arborescente comportant autant de branches que d’hypothèses de départ. On remarquera enfin que cette opération ne fait appel à aucun schéma de logique formelle. Sa difficulté, dans les raisonnements déductifs en langue naturelle, tient au fait qu’il peut y avoir des trous non remarqués, dans le jonction des pas de déduction. Ces trous non remarqués tiennent à soit des équivalences sémantiques mathématiquement non pertinentes, soit à des évidences perceptives lorsque les figures restent un appui.

Le fonctionnement des raisonnements déductifs consiste donc *en des substitutions successives de propositions les unes aux autres* : les premières, de détachement, substituent une conclusion intermédiaire aux prémisses d'un pas, et les secondes substituent des conclusions intermédiaires aux autres conclusions intermédiaires précédentes jusqu’au moment où l’on obtient la conclusion cible. Un raisonnement déductif n’a de sens que pour celui qui effectue ou ré-effectue lui-même toutes ces opérations de substitution. Et c’est *l’accomplissement de toutes opérations de substitution qui fait prendre conscience de la nécessité d’affirmer la conclusion,* quelque soit la valeur épistémique qu’elle pouvait avoir antérieurement. C’est le raisonnement déductif qui fait prendre conscience d’une nécessité « logique, métaphysique ou géométrique » (voir § 2.2.1).

3.2.3. Quel rôle pour la contradiction dans les preuves « logiques ou géométriques » ?

Le raisonnement déductif est au cœur des démonstrations mathématiques, comme Leibniz l’indiquait (voir § 2.1), mais avec cette particularité remarquable sur laquelle il faut nous arrêter un instant : le raisonnement déductif ne recourt jamais au principe de contradiction. Une telle affirmation peut surprendre car ce principe intervient dans les preuves par *reductio ad absurdum* et dans les réfutations de conjectures par un contre-exemple.

Les preuves par l’absurde sont des preuves paradoxales car leur emploi argumentatif en dehors des mathématiques est assez spontané et convaincant tandis qu’en mathématiques, il se révèle complexe et mérite la qualification de « formel ». En effet, les démonstrations par l’absurde incluent, entre l’acceptation provisoire de la vérité de l’affirmation opposée à celle qu’on veut démontrer et l’apparition d’une contradiction, un raisonnement déductif comme dans les autres démonstrations. En outre, le principe de contradiction ne peut être opératoire qu’en liaison avec un autre principe, celui du tiers

---

– le recours à un « warrant » n’impose pas une nécessité indiscutable, sa portée ou sa pertinence donnant lieu à des restrictions ; il peut donc être discuté comme n’importe quel argument dans un débat. La conclusion n’est pas obtenue par une opération de détachement permettant des opérations de substitution ;
– un seul niveau d’organisation est pris en compte.

exclu ! C'est peut-être en raison de cette complexité que les démonstrations par l'absurde apparaissent être des preuves « formelles », c'est-à-dire fondées uniquement sur des règles logiques de discours et non pas sur un mécanisme interne de substitutions mobilisant seulement des connaissances déjà prouvées. Mais ces règles de discours ne sont pas des règles qui s'imposent logiquement de manière universelle, même si ce sont des règles dialogiques indispensables au fonctionnement des interactions verbales dans un débat. C'est de manière éthique, et non pas logique, que le principe de contradiction s'impose (Lukasiewicz, 2000). Le principe de contradiction renvoie d'abord à une expérience de nécessité socio-normative (§ 2.2.3).

La recherche d'un contre-exemple est une attitude réflexe dans la pratique mathématique. Cependant l'importance de cette attitude ne doit pas faire oublier que cette démarche comme preuve reste limitée aux seuls cas de réfutation. Car un contre-exemple permet seulement d'écarter une conjecture fausse mais non pas de démontrer celle pour laquelle on ne trouve pas de contre-exemple. De ce point de vue, la recherche de contre-exemples laisse entière la question de la preuve en mathématique, c'est-à-dire de la manière dont les conjectures deviennent théorèmes. De plus, la capacité à produire un contre-exemple dépend de la base de connaissances du sujet (Duval, 2005).

3.3. Deux stades dans la découverte du fonctionnement d'un raisonnement déductif

Il s'agit, d'une certaine manière, de passer de l'autre côté du miroir, le miroir étant ici les pratiques spontanés d'expression verbale, en modalité orale ou écrite, que ce soit pour décrire, pour expliquer ou même pour convaincre quelqu'un dans une discussion. Car la production spontanée d'un discours ne se fait jamais par substitution de propositions les unes aux autres mais au contraire, par des effets de composition comme pour la production d'un tableau ou d'un dessin : les propositions s'ajoutent les unes aux autres, chacune venant enrichir ou préciser les précédentes (Duval, 1995b). Comment faire faire le saut aux élèves ? Il est évident que toute explication ou consigne verbale concernant le fonctionnement du raisonnement déductif est vouée à l'échec. Le problème didactique ici est analogue au cercle herméneutique dans la compréhension des textes. C'est pourquoi c'est en faisant travailler dans un registre non discursif, et qui ne soit pas celui des figures géométriques, qu'on peut faire découvrir le fonctionnement discursif du raisonnement déductif. Mais il faut ensuite un retour vers le registre de l'expression verbale pour faire prendre conscience des opérations effectuées dans le registre non-discursif.

3.3.1. Une activité d'organisation des propositions centrée sur leurs statuts respectifs

Tout commence là où ordinairement, l'on considère que tout est fait, c'est-à-dire lorsque la liste de toutes les « propriétés » à utiliser pour démontrer ont été écrites au tableau lors de la mise en commun des recherches du problème, recherches individuelles ou en groupe (voir § 3.1). Les élèves ont à percevoir comment les propositions de statuts différents se substituent les unes aux autres, c'est-à-dire comment la jonction s'opère à chacun des deux niveaux de l'organisation déductive. Or, la représentation la plus congruente au fonctionnement d'un raisonnement déductif est un graphe propositionnel construit comme un arbre inversé, puisqu'il part des hypothèses. L'intérêt de l'activité est donc de le faire construire aux élèves, sans aucun modèle mais en donnant les règles suivantes :

- d’une hypothèse (du problème), il part une flèche mais il n’en arrive aucune ;
- plusieurs flèches peuvent arriver à un théorème ou à une définition, mais il n’en part qu’une seule ;
- à la conclusion, il n’arrive qu’une flèche et il n’en part aucune.

Ces trois règles obligent les élèves à regarder constamment les propositions en fonction de leurs statuts respectifs et non plus de leur contenu. Et une telle situation constitue pour eux un véritable problème. On peut alors voir apparaître de manière explicite toutes les incompréhensions du raisonnement déductif, incompréhensions souvent masquées par une expression verbale reproduisant ce qui s’est dit lors de la mise en commun. Mais en même temps, les élèves découvrent progressivement que les règles sont un moyen qui leur permet non seulement de contrôler par eux-mêmes la validité du graphe construit, mais aussi de voir où était leur incompréhension du fonctionnement des raisonnements. Lorsque les élèves ont réussi à construire leur premier graphe, la construction d’un graphe de démonstration se fait très rapidement pour les autres problèmes. Mais tous les élèves ne parviennent pas à ce stade lors des premières séance (Egret, 1988).

3.3.2. Une description libre de la construction réalisée

Cette activité est introduite seulement lorsque les élève ont franchi le premier stade de la construction. D’une certaine manière, l’arbre propositionnel est une présentation explicite et suffisante de la manière dont « on joint » les hypothèses du problème à la conclusion. Alors pourquoi une activité de description libre serait-elle encore nécessaire ?

Il faut remarquer que nous parlons ici de description libre. Ces deux mots ont leur importance. D’une part, il s’agit de convertir une représentation non discursive en un discours dans sa propre langue. Rappelons ici l’importance pour l’apprenant de pouvoir dire lui-même ce qu’il a fait ou ce qu’il croit avoir compris de manière à mieux l’assimiler et mieux le maîtriser. Piaget (1967) évoquait déjà l’importance de l’expression pour une « prise de conscience » des opérations de pensée. D’autre part, l’intérêt de cette activité tient à ce qu’aucune formule d’expression canonique n’est imposée. Il ne s’agit pas de reproduire un modèle de texte de démonstration. Il s’agit que chaque élève puisse dire avec ses propres mots, sans avoir à justifier ce qu’il dit, le travail de justification qui a déjà été fait lors de la construction de l’arbre propositionnel. Ce qu’il exprime alors, c’est ce qu’il a compris dans la construction d’un arbre propositionnel. L’expression doit remplir ici une fonction d’objectivation avant de remplir une fonction de communication (Duval, 1995b).

Les observations qu’on peut faire alors, si l’on respecte les conditions de l’expérience, sont surprenantes. On peut les résumer dans les deux points suivants.

(1) Les textes produits par les élèves varient considérablement selon le type de représentation sémiotique qui leur sert de référence : une figure géométrique représentant visuellement les hypothèses du problème, une liste de propriétés-abréviations des théorèmes ou définitions à utiliser, ou l’arbre propositionnel d’une démarche de preuve par déduction. Il est nécessaire qu’on propose aux élèves le type de représentation sémiotique congruent à la démarche de pensée que le texte doit expliciter. Ainsi les élèves ont produit des textes totalement différents de ceux qu’ils écrivaient avant les séances de travail sur la construction des arbres propositionnels. Leurs textes étaient à la fois plus

explicites et plus structurés, notamment en ce qui concerne la distinction des pas de déduction. Mais ils étaient à la fois beaucoup plus longs que ce qui est généralement attendu.

(2) Il y a une évolution progressive dans les textes produits qui va dans le sens d'une économie d'expression. L'étude de l'évolution des textes produits a fait apparaître un phénomène intéressant concernant à la fois le marquage du statut des propositions et la compréhension des pas de déduction. Ainsi, pour introduire les hypothèses, les prémisses, les énoncés-tiers et les conclusions, les élèves ont spontanément utilisé des verbes ou des adjectifs qui exprimaient un degré de conviction différent selon le statut des propositions. Corrélativement, l'emploi des connecteurs, y compris le « donc », a disparu. C'est l'étude de l'évolution de ces textes qui a nous permis de voir comment la compréhension du fonctionnement du raisonnement déductif permettait aux démonstrations de devenir vraiment des preuves pour les élèves, c'est-à-dire de modifier dans leur esprit la valeur épistémique initialement associée à la conjecture à démontrer. Et la plupart des élèves l'ont vécu comme une découverte (Duval, 1991).

3.3. Quelle place pour ces deux types d'activité dans un apprentissage fondé sur la résolution de problèmes ?

Nous nous contenterons ici de poser la question par rapport à l'organisation d'une activité de résolution de problèmes en classe (voir § 3.1). En ce qui a trait à l'opposition souvent faite entre phase de recherche et phase de « rédaction », comment situer l'activité de construction d'un arbre propositionnel ? Du côté de la recherche ou du côté de la rédaction ? Et l'activité libre de description faite à partir d'un arbre propositionnel, peut-elle être considérée comme équivalente, pour la compréhension des élèves et pour les apprentissages, à une rédaction des informations verbales écrites au tableau lors de la mise en commun ?

Nous pouvons reformuler cette question d'une autre manière. Tout d'abord la distinction entre phase de recherche et phase de rédaction ne serait-elle pas une fausse distinction pour la période d'apprentissage ? Car en réalité, la phase de recherche requiert implicitement la compréhension du fonctionnement déductif ! Autrement dit, quelle est la fonction importante de la phase de rédaction lors de la période d'apprentissage : garder une trace institutionnalisée de la solution d'un problème particulier ou, au contraire, y découvrir la spécificité du fonctionnement déductif et à partir de là, *développer les capacités de recherche des élèves pour toutes les activités de résolution de problèmes à venir* ? Les observations que nous avons pu faire ont montré l'apport heuristique de ces deux types d'activité : savoir comment chercher face à un problème à résoudre. Mais cela n'a d'intérêt que pour le seul apprentissage des mathématiques.

4. AU-DELÀ DES MATHÉMATIQUES, QUEL APPORT POUR LA FORMATION ?

Avec cette question, nous changeons à la fois de niveau et de perspective. Il ne s'agit plus ici de se focaliser sur le développement des processus cognitifs qui sont requis par les démarches de pensée en mathématiques. Il s'agit de regarder l'élève dans le développement de sa personnalité et dans son intégration sociale à travers les expériences et les découvertes qu'il peut faire. Quel peut être le *retentissement*, sur le développement d'un individu, de l'exigence de preuve ***et*** de l'expérience intellectuelle de la démonstration mathématique ? Ou, pour formuler la question autrement, en quoi l'accès à la compréhension des démonstrations, lieu historiquement privilégié pour le développement de la rationalité (voir § 2.1, § 2.2.1), contribue-t-il au développement de la conscience éthique, et donc sociale, des individus ? Pour avancer un peu dans cette question aussi complexe qu'importante pour la formation initiale, nous allons porter notre attention sur un phénomène décisif dans le développement de la personnalité : la découverte de règles dans le milieu social environnant, et l'évolution du rapport aux règles chez l'enfant et le préadolescent. Le choix de cette entrée tient à l'explicitation qui est communément faite de la notion de citoyenneté en termes de « respect des règles » et de « responsabilité ».

4.1. Le problème du vécu individuel du rapport aux règles et de son évolution

Le rapport aux règles implique un *conflit interne* très profond entre :

- des exigences et des contraintes qui s'imposent *comme venant de l'extérieur* : les autres, une autorité institutionnelle, etc.
- l'exigence de liberté que l'individu ressent pour être lui-même : suivre d'abord *ce qui vient de soi-même.*

Ce conflit soulève une question importante d'un point de vue pédagogique : qu'est-ce qui amène un individu à reconnaître l'obligation de suivre certaines règles dans ses actions et ses comportements ?

4.1.1. L'analyse du rapport aux règles en termes d'autonomie et d'hétéronomie

Ce conflit semble renvoyer à une opposition apparemment insurmontable. En distinguant vis-à-vis des règles éthiques, un rapport D'HÉTÉRO-NOMIE et un rapport D'AUTO-NOMIE, Kant (1985) avait montré que la raison permettait à la conscience individuelle de dépasser cette opposition :

> *L'autonomie de la volonté est cette propriété qu'a la volonté d'être à elle-même sa loi. Le principe d'autonomie est donc de toujours choisir de telle sorte que les maximes de notre choix soient comprises en même temps comme lois universelles dans ce même acte de vouloir* [...]. *Quand la volonté cherche la loi qui doit la déterminer autre part que dans son aptitude à instituer une législation universelle qui vienne d'elle,* [...] *il en résulte toujours une hétéronomie* (op. cit., p. 308-309).

Ainsi quand la volonté s'accorde à l'universalité de la raison, elle accéderait à une autonomie morale[9], c'est-à-dire à une synergie non conflictuelle entre l'exigence personnelle de liberté et les formes sociales d'obligation. Dans *L'éducation morale*

---

[9] Il ne faut pas confondre la notion kantienne d'autonomie de la volonté avec la notion psychologique commune d'autonomie de l'individu qui en a été dérivée, c'est-à-dire la capacité à agir par soi-même et à faire face à des situations nouvelles. L'une renvoie à la reconnaissance de valeurs et à un jugement moral sur les actions et les comportements. En ce sens, l'opposé de la notion kantienne d'autonomie n'est pas l'hétéronomie mais l'A-NOMIE, c'est-à-dire le rejet de toute règle commune dans les relations avec les autres. La notion psychologique renvoie quant à elle à cette confiance en soi, qui est nécessaire pour qu'un individu puisse prendre des initiatives et des risques, y compris celui de se tromper. Son opposé n'est pas l'hétéronomie mais la DÉPENDANCE.

(Durkheim, 1925), ensemble de cours qui a marqué la formation des instituteurs en France durant plus d'un demi siècle, Durkheim a introduit cette notion kantienne d'autonomie dans le champ de la pédagogie, en faisant de la compréhension du pourquoi des règles l'équivalent de l'universalité kantienne de la raison. Il en a fait, avec l'attachement aux groupes sociaux et l'esprit de discipline, l'un des trois facteurs de la moralité. *Pour qu'une adhésion autonome à des règles se développe chez les enfants, il faut qu'ils comprennent le pourquoi de ces règles.*

4.1.2. Qu'est-ce qui favorise le développement d'une conscience autonome dans l'adhésion à des règles ?

C'est à cette question que Piaget (1932) a tenté de répondre dans une recherche sur l'évolution de la compréhension des règles — à commencer par celles du jeu — et des sanctions : *Le jugement moral chez l'enfant*. Dans ce travail, Piaget reprend l'analyse de Durkheim, mais il réinterprète les rapports d'hétéronomie et d'autonomie comme deux types d'interactions sociales entre individus dans un groupe. L'hétéronomie correspondrait à une relation de respect unilatéral des enfants à l'égard des adultes qui ont une autorité. L'autonomie correspondrait, au contraire, au respect mutuel entre pairs et exclurait toute différence de statut ou de rôle dans un groupe. Autrement dit, à la différence de Durkheim, Piaget marginalise, et même rejette, le rôle de l'enseignant et de l'autorité des adultes dans une évolution positive du rapport des enfants aux règles.

Pour Piaget, l'évolution du rapport aux règles chez l'enfant correspond d'abord au développement de la pensée, lequel se traduit par une prise conscience de la nécessité et par une complexification de cette prise de conscience (infra, § 2.1). C'est pourquoi Piaget a postulé un parallélisme étroit entre le développement de la pensée logique et celui de la conscience éthique. Mais pour qu'un tel développement puisse s'accomplir pleinement, il faut que les individus se trouvent placés dans *des situations de coopération*. Or, et c'est là le point essentiel pour Piaget et sur lequel il se différencie de Durkheim, de telles situations ne sont parfaitement réalisables que dans le cadre d'un travail où l'on met en œuvre une démarche de contrôle scientifique :

> *Au sein des mille groupements entrecroisés qui constituent notre société, les individus se mettent d'accord moins sur un ensemble de dogmes ou de rites à conserver que* ***sur une méthode ou un ensemble de méthodes à appliquer****. Ce qu'affirme l'un est vérifié par les autres, ce que fait l'un est mis à l'essai et contrôlé par les autres. L'essentiel des conduites expérimentales (qu'elles soient scientifiques, techniques ou morales) consiste ainsi* ***non en une croyance commune, mais en règles de contrôle mutuel****. Chacun est libre d'innover, mais dans la mesure où il réussit à se faire comprendre d'autrui et à comprendre autrui. Cette coopération qui, reconnaissons le, est loin de prévaloir encore dans tous les domaines sur la contrainte sociale, bien qu'elle constitue l'idéal des sociétés démocratiques, est seule à permettre la distinction entre le droit et le fait* (1985, pp. 277-278).

Piaget accordait ainsi un grand rôle aux preuves relevant d'une démarche expérimentale pour la socialisation et pour le développement d'une adhésion autonome à des règles communes. Or, la pratique de la méthode expérimentale renvoie à l'expérience d'une nécessité de type physique ou technique, et non pas de type logique ou de type normatif (§ 2.2.2 et § 2.3.2). On peut donc se demander si la découverte de ce qu'est la démonstration mathématique ne serait pas à la fois plus pertinente et plus forte que la pratique de la méthode expérimentale pour favoriser le développement de la conscience éthique, et donc sociale, des individus.

4.2. L'expérience intellectuelle de la démonstration et le passage de l'hétéronomie à l'autonomie

Trois traits caractérisent l'expérience intellectuelle de la démonstration, quand elle fonctionne comme une preuve pour quelqu'un. Et ces trois traits la distinguent fortement de l'expérience de nécessité physique qui peut être faite dans la mise en œuvre de la méthode expérimentale.

4.2.1. L'expérience intellectuelle de la démonstration

Tout d'abord, elle fait prendre conscience de la nécessité interne d'affirmer une proposition à partir de « suppositions données comme assurées », pour reprendre l'expression de Leibniz. Et nous avons vu qu'à strictement parler, cela n'implique l'application d'aucune règle externe à la démarche de raisonnement, le *modus ponens* étant seulement un schéma descriptif du fonctionnement d'un pas de déduction (§ 3.2.2).

Cette prise de conscience dépend entièrement des opérations de substitution de propositions que le sujet doit accomplir lui-même. Et cela vaut aussi bien pour celui qui suit la présentation, orale ou écrite, d'une démonstration faite par quelqu'un autre que pour celui qui la trouve. La démonstration n'est pas dans le texte qui l'expose mais dans les opérations de substitution dont le texte indique, de manière plus ou moins explicite, le déroulement.

Enfin, cette prise de conscience opératoire est une source de conviction plus puissante que toutes les autres sources de conviction (§ 2.3 et § 3.2.1). Les élèves qui comprennent le fonctionnement des opérations de substitution découvrent que la démonstration apporte quelque chose même si elle porte sur un résultat qui semblait perceptivement évident au départ. C'est sur ce point que se joue *le fait que la conscience d'une nécessité logique ou mathématique est éprouvée comme plus forte que toute évidence visuelle ou que tout constat perceptif.* C'est un choc pour les élèves lorsqu'ils ont l'occasion d'en faire une expérience personnelle. Ils ont alors le sentiment stimulant d'accéder à des perspectives et des possibilités qu'ils ne soupçonnaient pas. Moins que le contenu du résultat mathématique prouvé, c'est la manière d'y parvenir qui est pour eux comme une révolution.

4.2.2. Comparaison avec les preuves expérimentales

La nécessité physique est une nécessité externe, c'est-à-dire de l'ordre d'un constat : mesures effectuées à l'aide de dispositifs instrumentaux, ou phénomènes qui se produisent ou ne se produisent pas au terme d'un montage expérimental. Cela veut dire que la nécessité externe est indépendante de l'action des sujets. Celle-ci consiste en « l'application d'une méthode », pour reprendre une expression de Piaget. Cette nécessité externe est également une nécessité contingente. *De facto*, on n'arrive pas à trouver autre chose, mais on peut toujours imaginer que les choses se passent autrement dans un autre monde possible. Et ici, il faut préciser que l'expérience d'une nécessité externe se limite à l'expérience de l'impossibilité de ce dont il était légitime ou vraisemblable de faire l'hypothèse. Ce qui ouvre au jeu complexe de l'interprétation des résultats obtenus. Si logiquement les modalités du nécessaire et de l'impossible sont convertibles, cognitivement ce sont deux univers différents.

Autrement dit, les démonstrations mathématiques sont le lieu d'une expérience intellectuelle d'autonomie au sens fort du terme kantien, mais non pas les démarches expérimentales. Cela signifie que *c'est la rationalité seule*, et non pas les données observées de l'expérience ou le fonctionnement d'un machine, qui permet de concilier l'exigence de liberté de l'esprit et la reconnaissance d'une obligation qui s'impose à lui inconditionnellement. On peut résumer cela dans le tableau suivant :

Prise de conscience d'une nécessité...		
... indépendante de toute action du sujet	**... subordonnée à l'utilisation d'un appareil ou d'une machine**	**... liée à des opérations dépendant du seul pouvoir de notre pensée**
IMPOSSIBILITÉ de trouver autre chose	*CONTRAINTES de fonctionnement*	*NÉCESSITÉ PRODUITE par les seules opérations de la pensée*
Nécessité ***physique*** indépendante de l'expérimentation **(objectivité)**	Nécessité ***technique*** résultant de l'organisation d'un système **(pragma-nomie)**	Nécessité ***rationnelle*** intrinsèque à la production du discours **(Auto-nomie)**

Figure 7. Quelles expériences de la nécessité favoriser pour la formation éthique des individus ?

4.3. Preuves ou règles dans la formation à la « citoyenneté » ?

Les preuves ne dépendent pas de règles, du moins pas celles qui résultent de l'expérience de l'un des premiers types de nécessité (cf. § 2.2). Et si les démonstrations mathématiques constituent les expériences les plus fortes d'autonomie, à la fois dans le sens kantien et dans le sens psychologique du terme, on peut s'interroger sur le rapport de telles expériences avec l'adhésion personnelle à un ensemble de règles déterminant l'organisation d'une société ou permettant la coopération entre individus au sein d'un groupe.

4.3.1. Une rationalité propre à la parole

Il y a une rationalité qui est intrinsèquement liée à la pratique de la parole dans les interactions sociales. C'est celle signifiée par le terme grec *logos*, signification qui s'est trouvée occultée par le choix du terme latin *ratio* pour le traduire. Ainsi, Platon pouvait opposer le *logos* à la violence pour l'organisation de la cité. Or, cette rationalité intrinsèque à la parole repose essentiellement sur des règles qui déterminent les conditions de possibilité d'un dialogue ou d'une discussion, et non pas celles d'une validation scientifique (*épistémè*). **La rationalité s'éveille chez un individu quand il devient sensible à ces règles dialogiques et non pas logiques**. Nous en avons évoquées quatre (§ 2.2.3), mais nous allons ici nous limiter aux deux premières, celles qui sont les plus directement liées à la dynamique de la pensée : la possibilité d'une remise en question de ses propres évidences et l'exigence de cohérence.

La pratique de la parole ne peut pas être unilatérale. Cela veut dire qu'elle exige une alternance dans les positions de l'échange : chacun doit être « tour à tour interrogeant et interrogé... réfutant et réfuté... » (Platon, *Gorgias*, 462a). L'acceptation de l'alternance des positions est la première condition pour qu'une parole puisse ouvrir un « échange » et construire une relation entre des individus. On remarquera que cette règle dialogique implique l'effacement de tout différence de statut ou d'autorité entre les individus qui discutent. Nous retrouvons ici ce dont Piaget avait fait l'axe unique de l'évolution du rapport aux règles chez l'enfant : le passage d'un « respect unilatéral » où ne compterait que la parole de l'adulte — par exemple celle de l'enseignant —, à un « respect mutuel » où ne compteraient que les paroles entre pairs.

La pratique de la parole implique au moins une exigence pour le locuteur vis-à-vis son interlocuteur : celle de ne pas se contredire. Que celui qui parle ne soit pas « en désaccord » avec lui-même, Platon en avait fait une condition pour la poursuite même du dialogue, c'est-à-dire pour que l'échange commencé ne dégénère pas en « querelle de personnes ». (*Gorgias,* 457e). Et nous avons vu qu'Aristote n'avait pu justifier ce principe que par sa conséquence : la perte de sens pour celui qui écoute. Cette règle dialogique n'a rien de formel. Elle constitue un ressort puissant pour l'argumentation dans les polémiques et les débats, comme on peut le voir dans ceux portant sur des problèmes de société. Elle permet ainsi de développer des stratégies très différentes, qui ne relèvent d'aucune forme logique, pour mettre un interlocuteur en contradiction avec lui-même, comme l'a par exemple mis en évidence J. B. Grize (1983), sur un large corpus de textes recueillis dans la presse.

L'emploi logique du principe de contradiction à des fins de démonstrations (§ 3.2.3), est cognitivement plus complexe. Il requiert la prise en compte des mécanismes de quantification et de négation caractéristiques du langage, naturel ou formel. Ce qui veut dire que *l'emploi logique du principe de contradiction combine la règle dialogique constitutive de la PAROLE avec ces règles de fonctionnement propres au LANGAGE.* L'emploi logique du principe de contradiction recouvre donc l'emploi de plusieurs règles. Peut-être est-ce pour cette raison que Piaget, qui avait fait de la sensibilité à cette deuxième règle dialogique, le critère de l'accès à la pensée rationnelle (1967 (1924)), ne l'a pas retenue dans son étude de la formation du jugement moral chez l'enfant (1985 (1932)). Et, dans son premier modèle descriptif du développement de la pensée logique chez l'enfant, celui du passage d'un fonctionnement égocentrique à une socialisation, il ne retient de l'exigence de non contradiction que son caractère dia-logique.

La rationalité propre à la parole ne doit pas être confondue avec la rationalité mathématique, ni lui être subordonnée, même si celle-ci en marque une forme de développement extrêmement puissante. La rationalité propre à la parole en demeure totalement indépendante, non seulement parce qu'elle la précède génétiquement et historiquement, mais parce qu'elle donne lieu au développement divergent d'autres formes de rationalité, comme Aristote l'avait déjà souligné à propos de l'argumentation rhétorique et de la dialectique. Nous ne faisons que retrouver ici la rupture cognitive de fonctionnement qui marque le passage des modes d'argumentation « naturels », *parce que* *commandés par la spontanéité de l'expression orale*, aux démonstrations mathématiques, lesquelles nécessitent le support, l'auto-interaction et l'autocontrôle de l'expression écrite, c'est-à-dire d'une visualisation qui en objective le discours (Duval, 1992, 2001). Cela conduirait-il à marginaliser l'apport de l'expérience d'autonomie intellectuelle que sont les preuves au profit du « respect des règles », quelles qu'elles soient ?

4.3.2. Rationalité, règles et respect

Rien n'est peut-être plus trompeur dans l'éducation que l'emploi du mot « règle ». Car il y a une multitude de règles. Ainsi nous venons de voir qu'il y a les règles dialogiques intrinsèques à la parole et les règles de fonctionnement propres à l'emploi d'un langage. Et ces dernières peuvent être des règles logiques relatives aux mécanismes de la quantification et de la négation, mais également des règles syntaxiques relatives à la composition des mots en une seule unité de sens. Il y a également les « règles de priorité » dans le calcul littéral, correspondant aux propriétés des opérations. On peut ajouter à cela les règles constitutives des jeux, les règles de circulation et, finalement, tout ce qu'on qualifie de « codes ». La question que soulève cette multitude hétérogène de « règles » est celle de leur valeur d'obligation. Autrement dit, le rapport aux règles peut-il avoir la même signification quand il s'agit de règles dialogiques, de règles de grammaire, de règles de jeu, ou de règles de conduites dans l'organisation d'un groupe ?

Arrêtons nous un instant sur cette expression, qui est presque devenue un slogan : « respecter les règles ». C'est un véritable abus de langage. On ne respecte pas une règle, on l'applique ou on ne l'applique pas. Le respect est un « sentiment moral [...] exclusivement produit par la raison, [... qui] s'applique toujours uniquement aux personnes » (Kant, 1976, p. 80). Et toute personne est une « fin en soi » (Kant, 1976, p. 92). Autrement dit, on respecte quelqu'un mais on applique, ou on « suit » une règle. Ce qui implique qu'on peut ne pas appliquer des règles et respecter les personnes, et inversement. La véritable question, celle qui concerne le premier enjeu dans la formation à la citoyenneté peut alors être formulé ainsi : quelles sont les règles qui peuvent avoir un lien avec le respect des personnes ?

Les seules règles, semble-t-il, qui aient un lien direct avec le respect des personnes sont les règles dia-logiques. Elles constituent la parole comme un acte de reconnaissance de l'autre et non pas seulement d'expression de soi ou d'une communication qui peut toujours être instrumentalisée. Les règles dialogiques ne s'appliquent pas à proprement parler, ce sont des exigences dont la prise de conscience est liée au développement des relations avec les autres. Certes, on peut les imposer de manière externe et formelle, en organisant par exemple des prises de parole dans la discipline d'un groupe dirigé par quelqu'un qui a autorité. Mais ce sont là des conditions qui renforcent l'hétéronomie au lieu de développer l'autonomie, pour reprendre la problématique kantienne et piagetienne. Car si on peut ainsi induire des comportements conformes pour certaines situations, on ne développe ni la rationalité première qui fait la force et la liberté de la parole, ni le sens de la coopération.

Les autres règles n'ont pas de lien direct avec le respect des personnes. Elles concernent *le fonctionnement d'un système* : systèmes sémiotiques, systèmes informatiques, systèmes techniques, jeux, organisation des échanges dans un groupe ou dans une société... Ici l'application des règles est directement liée à l'efficacité d'une action. Naturellement, *selon les systèmes, le lien entre le fait d'appliquer des règles et l'efficacité peut-être plus ou moins fort.* Avec certains systèmes le fait de ne pas suivre les règles, instructions d'un menu ou règles d'emploi d'une machine, rend impossible toute action. Avec d'autres systèmes, comme la grammaire d'une langue, le fait de ne pas suivre les règles rend encore l'action possible bien qu'elle en diminue l'efficacité, par exemple pour la précision de l'expression ou pour la communication. Enfin avec les règles de conduites propres à l'organisation sociale des groupes, le fait de ne pas suivre les règles a une issue indéterminée : sanction, rupture de l'échange ou, au contraire, rien du tout. Ici la problématique du rapport aux règles devient autre. De toutes manières, une application efficace de ces règles requiert qu'on comprenne *le pourquoi* de ces règles (Durkheim, 1974). Or, comprendre le pourquoi c'est comprendre *comment* fonctionne le système dont les règles décrivent partiellement l'utilisation. Et cela est indépendant du respect des personnes.

La complexité de la formation éthique et citoyenne des individus tient à ce qu'on ne peut la réduire ni à un seul type d'expérience ni à un type de comportement dont le critère formel serait le « respect des règles ». Parce que cette formation est intimement liée au développement de la rationalité, elle requiert au moins deux types d'expériences différentes. L'une est évidemment celle de la parole, permettant de créer des situations de coopération. L'autre est celle des démonstrations, qui rendent possible une expérience intellectuelle d'autonomie à la fois dans le sens psychologique et dans le sens moral du terme. La formation éthique, qui reste fictive tant qu'elle ne permet pas de dépasser le conflit entre une obligation venant de l'extérieur et ce qui vient de soi, repose en fait sur la coordination d'une rationalité DIALOGIQUE, dans laquelle l'hétéronomie se construit comme un accord avec les autres, et d'une rationalité APODICTIQUE, qui est indépendante du jeu dialogique des consensus et des désaccords. On peut dès lors s'interroger sur l'importance accordée au « respect des règles » dans l'éducation à la « citoyenneté », au regard des déviances formalistes que l'insistance sur les règles, purement hétéronomique, favorise.

5. CONCLUSION

Le développement de la rationalité, pour une appropriation autonome des connaissances scientifiques et pour la reconnaissance de règles communes permettant de construire des relations avec les autres, est un enjeu essentiel de la formation initiale. J'ai essayé de montrer quel était l'intérêt d'une initiation aux démonstrations mathématiques pour ce développement.

Nous avons vu que la rationalité a deux origines différentes : la preuve comme expérience d'une nécessité et la parole comme activité dialogique. Il existe autant de types de preuves que de types d'expérience d'une nécessité. Dans la démonstration, qui historiquement s'est imposée comme modèle de la rationalité, l'expérience de la nécessité se fait dans les opérations discursives de pensée que chacun effectue lui-même : elle ne vient pas de données ou de contraintes extérieures. La prise de conscience de la nécessité y dépend exclusivement des actes de pensée que chacun accomplit en substituant des propositions les unes aux autres selon leurs statuts respectifs. En ce sens, Aristote pouvait affirmer que « la démonstration ne concerne pas le discours extérieur mais celui qui a lieu dans l'âme » (2005, 76b 24-25). En revanche, la parole, qu'il ne faut pas confondre avec le discours qu'elle communique, repose sur des règles dialogiques dont le rejet conduit non seulement à sa destruction mais à l'impossibilité de construire des relations avec les autres. Ces règles dialogiques sont d'emblée des règles éthiques, c'est-à-dire des règles qui engagent un respect inconditionnel de l'interlocuteur, avant même toute considération de parité ou d'autorité.

Reconnaître deux origines différentes de la rationalité, c'est reconnaître le développement de deux formes fondamentales de rationalité, l'une scientifique et l'autre socio-normative, qui ne dépendent pas l'une de l'autre. Il y a bien sûr le principe de contradiction qui semble leur être commun. Mais en tant que règle éthique, celui-ci donne lieu à des interprétations différentes selon qu'on est en position de locuteur ou d'interlocuteur et, en tant que principe logique, il doit être associé aux mécanismes de quantification et de négation propres à un langage. Ce sont donc là deux formes de rationalité qui sont irréductibles et qui peuvent soit se renforcer soit s'opposer. Leur irréductibilité apparaît à travers le type et la force de conviction dont elles sont la source. L'une produit une conviction autonome et universelle, l'autre une conviction hétéronome et relative à l'identité, à l'histoire, à l'organisation d'un groupe ou d'une société. Cela soulève évidemment la question de l'unité de cette instance qu'on appelle la Raison et qui ne peut pas être considérée comme une faculté dans le sens où la perception, la mémoire, l'imagination, l'intelligence ou la volonté sont des facultés.

L'apport de l'activité de démonstration porte d'abord sur le développement de la rationalité scientifique. En ce sens, elle permet de développer la sensibilité à une nécessité interne, qui est aussi essentielle pour la formation de la conscience individuelle que la « sensibilité à la contradiction ». Celle-ci, d'ailleurs, en reste le plus souvent au stade d'une sensibilité à la confusion sémantique dans l'emploi des mots ou à celui d'un jeu rhétorique avec des oppositions antonymiques, comme on peut l'observer dans la plupart des débats.

La manière d'enseigner les mathématiques ne dépend pas seulement des objectifs de formation qui sont visés mais également de ce qu'est l'activité mathématique. Cependant, le type de fonctionnement cognitif que mobilise cette activité est plus complexe et parfois en rupture avec celui mobilisé dans les autres domaines de connaissance. Ainsi avons nous pu voir que, sous des similitudes de surface, le fonctionnement d'un raisonnement déductif valide est totalement différent de l'utilisation d'arguments dans une discussion. Là est la raison profonde pour laquelle les raisonnements mathématiques ne peuvent pas fonctionner comme des preuves pour les élèves, c'est-à-dire modifier la conviction qu'ils pouvaient avoir avant ou créer une conviction s'ils n'en avaient aucune. Cela conduit à se réinterroger sur l'organisation didactique des activités dans une résolution de problème.

Ce qu'on nomme parfois argumentation dans la phase de recherche pour résoudre un problème présuppose en fait la compréhension du fonctionnement des raisonnements explicitement mis en œuvre dans la démonstration. Ce qui veut dire que durant les premières étapes d'un apprentissage, l'objectif n'est pas tant de faire découvrir quels sont les théorèmes ou propriétés à utiliser pour résoudre tel ou tel problème donné, mais de faire prendre conscience comment on y utilise les théorèmes et les définitions. Car là est peut-être une source de beaucoup d'équivoques dans l'enseignement des mathématiques, mais aussi le révélateur des objectifs réellement visés.

Il y a deux utilisations cognitivement opposées des théorèmes : pour effectuer une déduction valide dans une démarche de raisonnement, ou pour appliquer une formule dans laquelle on substitue des valeurs particulières à des lettres. Si l'on s'en tient à la seconde utilisation, on peut se demander par exemple la différence qui sépare le théorème de Pythagore et la loi d'Ohm, résultat de mesures effectuées sur l'intensité des courants électriques en faisant varier la différence de potentiel aux extrémités du fil. Derrière la diversité des procédures de résolution d'un problème que nous avons évoquée en commençant se cachent donc une alternative dans l'utilisation des théorèmes et un choix quant à l'apport des mathématiques dans la formation des élèves : quelques connaissances ou le développement de ces gestes rationnels de pensée que Platon (1994) décrivait ainsi :

> *Exerce-toi, pendant que tu es jeune encore, et entraîne toi à fond en te livrant à ces exercices qui aux yeux du grand nombre paraissent être une pure perte de temps* […] *sinon la vérité se dérobera à tes prises* […]. *Il ne suffit pas d'examiner dans une question que l'on étudie* LES CONSÉQUENCES QUI DÉCOULENT DE L'HYPOTHÈSE QUE L'ON FAIT « s'il est… », *mais il faut faire de même de* L'HYPOTHÈSE CONTRAIRE « s'il n'est pas…» (op. cit., 135d, 135e-136a).

BIBLIOGRAPHIE

ARISTOTE (1969). *ORGANON II, De l'interprétation.* Trad. Tricot. Vrin, Paris.

ARISTOTE (2005). *Seconds analytiques*. Trad. Pellegrin. Garnier-Flammarion, Paris.

ARISTOTE (1974). *La Métaphysique*. Trad. Tricot. Vrin, Paris.

BALACHEFF, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de Collège*. Université Joseph Fourier, Grenoble.

BALACHEFF, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 18, n°2, mai 87, pp. 147-176.

BARBIN, E. (1988). La démonstration mathématique : significations épistémologiques et questions didactiques. *Bulletin A.P.M.E.P.*, 366, pp. 591-620.

DELEDICQ, A., LASSAVE, C. et MISSERAND, C. et D. (1988). *Faire des mathématiques,4ème.* Nathan, Paris.

DURKHEIM, E. (1925 (1974)). *L'éducation morale*. Presses Universitaires de France, Paris.

DUVAL, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et de Sciences Cognitives,* n° 10, pp. 5-53.

DUVAL, R. (2001). Pourquoi faire écrire des textes de démonstration. In *Produire et lire des textes de démonstration*. Collectif coord. par É. Barbin, R. Duval, I. Giorgiutti, J. Houdebine, C. Laborde, pp. 183-205. Ellipses, Paris.

DUVAL, R. (1995a). Geometrical Pictures : kinds of representation and specific processing. In *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*, pp. 142-157. Sutherland & Mason, éds. Springer, Berlin.

DUVAL, R. (1995b). *Sémiosis et pensée humaine*. Éditions Peter Lang, coll. Exploration, recherches en sciences de l'éducation, Berne, Suisse.

DUVAL, R. (1992). Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ? *Petit x*, n°31, pp. 37-61.

DUVAL, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, 22, pp. 233-261.

EGRET, M. A. (1988). Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. N° 2, pp. 41-64.

JAM, F. (1980). À propos de la notion d'aire. In *D.E.A de Didactique des Mathématiques 1980-1981*, pp. 18-80. IREM de Strasbourg.

GRIZE, J.-B. et PIÉRAULT-LE-BONNIEC, G. (1983). *La contradiction. Essai sur les opérations de la pensée*. Presses Universitaires de France, Paris.

KANT, E. (1986). *Critique de la raison pratique*. Trad. Picavet. Presses Universitaires de France, Paris.

KANT, E. (1985). *Fondements de la métaphysique des moeurs*. Oeuvres II. La Pleïade, Paris.

LEIBNIZ, G. W. (1972). *Oeuvres*. L. Prenant, éd. Aubier Montaigne, Paris.

LEIBNIZ, G. W. (1969). *Essais de Théodicée. Discours de la conformité de la foi avec la raison*. Garnier-Flammarion, Paris.

LUKASIEWICZ, J. (2000 (1910)). *Du principe de contradiction chez Aristote*. Trad. D. Sikora. L'éclat, Paris.

MOREAU, J. (1962). *Aristote et son école*. Presses Universitaires de France, Paris.

PADILLA SANCHEZ, V. (1992). *L'influence d'un acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des mathématique*s. IREM de Strasbourg.

PIAGET, J. (1967 (1924)). *Le jugement et le raisonnement chez l'enfant*. Delachaux et Niestlé, Neuchâtel, Suisse.

PIAGET, J. (1962 (1941)). *Le développement des quantités physiques chez l'enfant.* Delachaux et Niestlé, Neuchâtel, Suisse.

PIAGET, J. (1985 (1932)). *Le jugement moral chez l'enfant*. Presses Universitaires de France, Paris.

PLATON (1994). *Parménide*. Trad. Brisson. Garnier-Flammarion, Paris.

RICHARD, P. (2004). *Raisonnement et stratégies de preuve dans l'enseignement des mathématiques*. Éditions Peter Lang, Berne, Suisse.

TOULMIN, S. E. (1958). *The use of arguments.* Cambridge University Press, Royaume-Uni.

COMMUNICATIONS

L’argumentation pour un élève citoyen : un préalable au raisonnement mathématique !

RICHARD PALLASCIO

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

RÉSUMÉ. On peut considérer le développement d’une éducation à la citoyenneté dans le contexte d’activités « de transfert, de contextualisation et d’intégration des apprentissages permettant le développement des dimensions cognitive, sociale et personnelle de l’élève » (CPÉ, 2004). Nous pensons que les mathématiques ont un rôle important à tenir dans cet enjeu permettant à l’élève de devenir un citoyen actif et responsable. Et cela passe par un apprentissage de l’explicitation et de l’argumentation, des préalables à un raisonnement mathématique plus formel. Le contexte de l’approche philosophique au sujet des mathématiques offre un cadre permettant de favoriser une éducation à la citoyenneté par les mathématiques. Des *exemples* sont apportés, dans le contexte d’une telle approche réflexive au sujet des mathématiques.

INTRODUCTION

Selon Audigier (1999), *l’éducation à la citoyenneté* comporte des compétences cognitives, éthiques et sociales. Les compétences d’ordre cognitif portent sur le juridique et le politique, sur les connaissances (scientifiques, techniques, technologiques) du monde actuel qui comportent une dimension historique et culturelle, sur des connaissances procédurales (argumentation, pratique réflexive) de même que sur les valeurs et les principes relatifs aux droits de la personne et à la citoyenneté démocratique. Les compétences citoyennes d’ordre éthique portent sur l’acceptation de la diversité, la cohésion sociale, la participation critique à la vie et à la délibération démocratiques, l’équité, l’égalité, la préservation de la vie sur la planète et le développement durable. Quant aux compétences citoyennes d’ordre social, elles ont trait au vivre-ensemble, à la coopération, à l’élaboration et à la réalisation de projets communs, à la résolution de conflits selon les principes du droit démocratique ainsi qu’à l’intervention dans le débat public, l’argumentation et le choix en situation.

En juin 2004, la CPÉ (Commission des programmes d’études du Ministère de l'Éducation du Québec(MEQ)) adressait au ministre de l’Éducation un avis sur les DGF (Domaines généraux de formation) dans le nouveau programme de formation de l’école québécoise, intitulé « Vers un élève citoyen ». L’orientation première qui ressortait de cet avis était de faire de l’éducation à la citoyenneté le fil conducteur des domaines généraux de formation (DGF). Les DGF y sont définis « comme étant à la fois des lieux de transfert, de contextualisation et d’intégration des apprentissages permettant le développement des dimensions cognitive, sociale et personnelle de l’élève » (CPÉ, 2004, p. 26).[1]

[1] Ces DGF portent sur les médias, la santé et le bien-être, l’environnement et la consommation, l’orientation et l’entreprenariat, le vivre-ensemble et la citoyenneté.

L'ÉDUCATION À LA CITOYENNETÉ ET LE RÔLE DES MATHÉMATIQUES

Ce qui relie les DGF officiels inclus dans le *Programme de formation de l'école québécoise* (2000), leur fil conducteur, réside dans l'éducation à la citoyenneté, ce qui incitait la CPÉ à recommander au Ministre de leur donner comme « socle commun l'éducation à la citoyenneté et comme finalité celle de permettre aux élèves de développer des compétences citoyennes d'ordre cognitif, éthique et social » (2004, p. 31). Du coup, toutes les disciplines sont interpellées et en particulier les mathématiques. La définition d'Audigier (1999) fait d'ailleurs une place importante au développement d'habiletés argumentatives et à une pratique réflexive, ce qui concerne les mathématiques au premier chef.

Les mathématiques offrent une plate-forme puissante permettant aux élèves de construire des raisonnements de nature inductive ou déductive. Cela semble évident. Mais il est surprenant d'entendre les arguties d'élèves du 2e cycle du secondaire ou du collégial, ou même d'étudiants universitaires, ne faisant aucune distinction entre un point de vue spontané et un argument, peinant à identifier des critères de nature concrète ou abstraite qui leur permettraient d'établir un argument, refusant les conclusions d'un raisonnement fondé sur le « modus ponens » (si A est vrai et si A implique B est vrai, alors B est vrai), etc. Cette constatation permet de ne pas nous étonner du peu de succès des incursions didactiques lorsqu'il s'agit de faire construire aux élèves des démonstrations formelles, soit des théorèmes fondés sur d'autres théorèmes et axiomes.

La thèse que nous défendons ici est à l'effet que les *mathématiques* ont un rôle important à tenir dans cet enjeu, permettant à l'élève de devenir un citoyen pleinement actif et responsable (Bednarz, Roulet et Pallascio, 2000). Et cela passe, selon nous, par un apprentissage de l'explicitation (Pallascio, Daniel et Mongeau, 2001) et de l'argumentation, des préalables à un raisonnement mathématique plus formel. Le contexte de l'approche philosophique au sujet des mathématiques (PPEM) offre un cadre permettant de favoriser une éducation à la citoyenneté par les mathématiques. Des *exemples* sont apportés, dans le contexte d'une telle approche réflexive au sujet des mathématiques.

Des activités en amont, concernant l'argumentation et le développement d'une pensée réflexive, semblent nécessaires et constituent un préalable. Et ces activités devraient, à notre avis, débuter dès le primaire (Pallascio, Daniel et Lafortune, 2004).

EN AMONT :
UNE ARGUMENTATION RÉFLEXIVE AU SUJET DES MATHÉMATIQUES

> « Apprendre et penser sont des activités toujours situées dans un cadre culturel »
> Jérome Bruner

Une équipe anime depuis quelques années un site internet permettant à des groupes d'élèves de 10 à 15 ans, donc du 3e cycle du primaire et du 1er cycle du secondaire, d'interagir autour de questions au sujet des mathématiques (Pallascio, Charbonneau, Lajoie, 2001). L'objectif est de permettre aux élèves de construire une argumentation au sujet de questions pertinentes, afin qu'ils deviennent progressivement par là les « auteurs » de leurs connaissances. Les questions proviennent surtout des élèves ; par exemple : « Le hasard existe-t-il ? » ou « Peut-on parler de beauté en mathématiques ? ». Le rôle des animateurs du site est d'élaborer diverses capsules, historiques, mathématiques, philosophiques, pédagogiques..., afin de supporter les activités réflexives des élèves et également, celles de leurs enseignants.

Les dialogues amènent des élèves du stade pré-formel à prendre conscience des concepts mathématiques qu'ils manipulent. En s'inscrivant dans une communication virtuelle qui les insère dans un contexte de « coopérative d'idées », les élèves acquièrent ainsi une perception du constructivisme historique à travers lequel se sont constitués les concepts mathématiques. Les groupes virtuels représentent une certaine société pour les élèves, les messages-synthèses représentant et transposant alors la réflexivité des groupes d'élèves entre eux.

Les situations éducatives proposées sont des processus interactifs où les élèves ont à interpréter, poser des hypothèses, réfléchir, porter des jugements ; bref, à argumenter de manière réflexive (Krummheuer, 2000). L'interaction sociale est une composante nécessaire à tout apprentissage. Les élèves ne font pas qu'apprendre des éléments de la culture, ils la créent. L'interaction est ici de nature argumentative, c'est-à-dire basée sur une rationalité discursive. Ils construisent leurs connaissances à travers des débats philosophiques menés sur des questions mathématiques. Les questions discutées proviennent des élèves eux-mêmes, mais sont inspirées de la culture mathématique et de son histoire et donnent lieu à diverses recherches dont les résultats sont mis en commun dans la discussion. Les élèves deviennent ainsi eux-mêmes des producteurs actifs de connaissances et de savoirs, qui sont mis en partage et développent ainsi chez ces élèves leur pensée critique, des habiletés d'argumentation et de négociation collective des savoirs et par là, des habiletés cognitives et métacognitives. Les élèves acquièrent aussi de façon concrète et ancrée une perception et une compréhension du caractère construit des mathématiques. Enfin, l'échange virtuel est l'occasion d'un véritable partage d'idées dans un esprit fort semblable à celui qui anime les membres de communautés scientifiques.

QUELQUES EXEMPLES

Quelques exemples de dialogues entre classes d'élèves vont permettre de situer le type d'argumentaires élaborés à la suite d'échanges de nature réflexive, où des activités mathématiques ont joué le rôle de déclencheur. La première question porte sur « L'Univers est-il infini? » et la seconde sur « Le soleil est-il plus rond que la terre? »

L'Univers est-il infini ?

La classe A lance le débat (c'est la classe entière qui décide de ce qu'elle va envoyer comme message), en invoquant le paradoxe de Zénon pour réfléchir sur le fini et l'infini.

Classe A. *Bonjour! Quand c'est fini, c'est qu'il y a une fin ; on peut le mesurer. Quand c'est infini, ça ne finit jamais. Par exemple, la suite des nombres entiers est infinie, car tout nombre a un suivant. Les philosophes grecs ont discuté le paradoxe d'Achille et la tortue. Achille, qui va 10 fois plus vite que la tortue qu'il poursuit, pendant qu'il se rend là où était la tortue, voit la tortue avancer* *le 1/10 de ce chemin. Pendant qu'Achille fait ce bout de chemin, la tortue parcours le 1/10 de ce bout de chemin. Etc. Achille semble ne jamais rejoindre la tortue. Mais on sait qu'il la rejoint et la dépasse.*

La classe B répond, et y va d'une représentation imagée : pensée créative générative et interprétative.

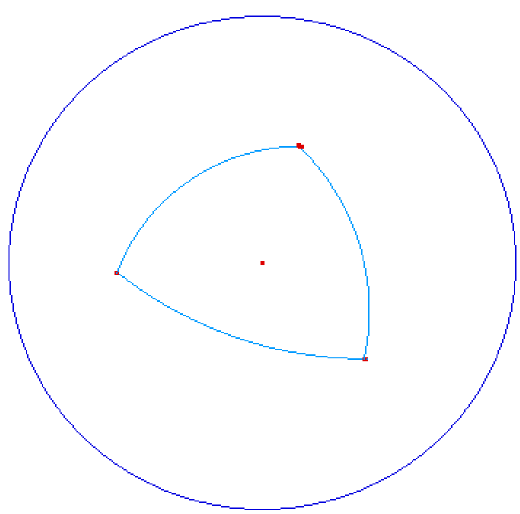
Classe B. *Selon la théorie du Big Bang, notre univers serait né il y a 15 milliards d'années. Les objets de l'Univers, comme la Terre, s'éloignent les uns des autres. L'astronome Hubert Reeves, un québécois qui travaille en France, prend l'exemple de raisins dans la pâte à pain qui s'éloignent les uns des autres pendant la cuisson ! D'autres scientifiques parlent du Big Crunch, où les objets de l'Univers, après un certain temps, reviendraient les uns sur les autres ! Mais cela veut-il dire qu'il n'y aurait pas d'autres Big Bang ou qu'il n'y en a pas déjà eu d'autres ? Qu'en pensez-vous ?*

Réponse de la classe A : une analogie à l'aide de la géométrie sphérique.

Classe A. *Bonjour ! Einstein a écrit une théorie disant que l'Univers était fini mais illimité ! Pour avoir une idée de qu'il voulait dire, on peut prendre comme exemple la Terre : si on part de Longueuil et qu'on se dirige vers Fursac par le chemin le plus court, on va se promener sur un grand cercle qui « coupe » la Terre en deux parties égales. Et si on continue toujours dans la même direction, on va finir par revenir à notre point de départ ! Donc on pourrait se promener aussi longtemps qu'on voudrait (illimité), mais la circonférence de la Terre est finie !*

Une activité mathématique

Dans le contexte de ce dernier message, un groupe d'élèves du 3e cycle du primaire a travaillé sur la géométrie de la sphère. Après que ceux-ci eurent identifié, à l'aide de règles flexibles, les segments de grands cercles (ou géodésiques) comme étant les plus courts chemins entre deux points sur la sphère, un des problèmes posés consistait à trouver les sommes minimale et maximale des angles d'un « triangle sphérique ».



Le véritable obstacle ne résidait pas dans l'acceptation de la solution trouvée, à savoir que les sommes des angles de triangles sphériques se situent dans l'intervalle]180° ; 900°[, mais dans la reconnaissance du second triangle sphérique couvrant en totalité la partie de la sphère extérieure à un premier triangle, tel celui représenté ci-dessus. En effet, en revenant à la définition d'un triangle sphérique et en argumentant entre eux, les élèves ont pu convenir que cette zone désigne également une région comprise entre trois segments de géodésiques ou grands cercles.

Le soleil est-il plus rond que la terre ?

Les échanges entre les classes A et B les ont menés loin ! Dans le cours de ceux-ci s'est posée la question de la forme de la terre. La classe A lance alors une hypothèse créative.

Classe A. *Plus l'astre est gros, plus il y a de l'attraction. Sur la lune, les astronautes peuvent faire des sauts plus longs, car il y a moins de gravité. Le soleil est des milliers de fois plus gros que la terre. Sa gravité doit être beaucoup plus forte. Donc, les particules autour du soleil sont plus attirées vers le noyau du soleil. Il est donc plus rond que la terre.*

Laurent a dit que ce n'est peut-être pas une question de grosseur, mais de masse. Une grosse planète gazeuse comme Jupiter n'a peut-être pas une grosse attraction. Guillaume croit que c'est une combinaison des deux. On va faire des recherches à ce sujet.

La classe B recherche des critères pour argumenter.

Classe B. *Sur quel critère vous basez-vous pour dire que le soleil a une gravité plus importante que celle de la terre ? Pourtant, personne n'est jamais allé sur le soleil !*

Les scientifiques ont calculé la masse du soleil (environ 2 suivi de 27 zéros tonnes) et pourtant, personne n'a été sur le soleil. On va chercher des informations sur leur façon de calculer.

Une déduction plus formelle comme réponse de la classe A, même si la conclusion est un peu raccourcie.

Classe A. *Uranus a un diamètre 4 fois plus grand que la terre et la gravité y est plus petite. Donc, on ne peut pas dire que plus l'astre est grand, plus l'attraction est grande.*

Saturne a une masse 5 fois plus grande que Neptune et la gravité y est plus petite. Donc, on ne peut pas dire non plus que plus la masse d'un astre est grand, plus l'attraction y est grande.

Mars fait un tour sur elle-même en plus de 24 heures et la gravité est plus petite que sur la terre. On ne peut donc pas dire non plus que la durée d'un tour a un rapport avec la gravité.

L'intuition de Guillaume était bonne !

CONCLUSION

Par cette communication, j'ai tenté de montrer que l'apprentissage d'une argumentation sur des questions liées aux mathématiques était un préalable à des raisonnements plus formels à l'intérieur d'un registre plus symbolique propre aux mathématiques. Un contexte, celui d'une approche philosophique au sujet de questions mathématiques, permet aux élèves de développer une argumentation socialement ancrée.

BIBLIOGRAPHIE

AUDIGIER, F. (1999). *L'éducation à la citoyenneté*. INRP, Paris.

BEDNARZ, N., ROULET, G. et PALLASCIO, R. (2000). Des mathématiques pour des citoyens actifs et responsables. *Forum canadien sur l'enseignement des mathématiques*. Société mathématique du Canada. camel.math.ca/CMS/

COMMISSION DES PROGRAMMES D'ÉTUDES (2004). *Vers un élève citoyen*. Avis au Ministre de l'Éducation sur les domaines généraux de formation dans le programme de formation de l'école québécoise. Québec : www.cpe.gouv.qc.ca

KRUMMHEUER, G. (2000). Mathematics learning in narrative classroom cultures: Studies of argumentation in primary mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 20 (1), pp. 22-32.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DU QUÉBEC (2000). *Programme de formation de l'école québécoise*. MEQ, Québec.

PALLASCIO, R., DANIEL, M.-F. et LAFORTUNE, L. (2004). Une pensée réflexive pour l'éducation. In *Pensée et réflexivité : théories et pratiques*, pp. 1-12. R. Pallascio, M.-F. Daniel, et L. Lafortune, éds. Presses de l'Université du Québec, Québec.

PALLASCIO, R., CHARBONNEAU, L. et LAJOIE, C. (2001). *L'Agora de Pythagore*. Euler.CyberScol.qc.ca/Pythagore/

PALLASCIO, R., DANIEL, M.-F. et MONGEAU, P. (2001). Philosopher sur les mathématiques : une situation a-didactique. In *Les didactiques des disciplines : un débat contemporain*, pp. 81-98. P. Jonnaert et S. Laurin, éds. Presses de l'Université du Québec, Québec.

Pallascio.Richard@uqam.ca

La didactique du sens commun : pour un retour dans la cité …

SOPHIE RENÉ DE COTRET

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

RÉAL LAROSE

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

RÉSUMÉ. Pour Bachelard, il y a le sens commun et l'esprit scientifique. Le plébéien, ou l'homme du peuple, parce qu'il exprime des opinions, n'a pas accès à la cité scientifique. Le sens commun n'en est pas une tare pour autant. Il permet de prendre des décisions rapides et souvent efficaces. Il conduit aussi parfois à de mauvaises décisions. Peut-on entraîner le sens commun à s'arrêter pour consulter l'esprit scientifique ? Nous postulons qu'une prise de conscience collective de nos illusions cognitives pourrait contribuer à façonner une « clochette de vigilance » qui résonnerait à la porte de la cité scientifique. La didactique du sens commun peut-elle aider le citoyen à se munir d'une telle clochette ? À défaut de tout savoir, il peut devenir très utile de savoir qu'on ne sait pas tout !

INTRODUCTION

Le sens commun est considéré comme le régisseur de nos actions quotidiennes. Et, comme le soulignent Guenancia et Sylvestre, « …le sens commun pratique persiste toujours sous le savoir objectif — pour le savant aussi, le soleil se lève et se couche… » (2004, p. 6). On peut penser que c'est simplement le côté commode de cette assertion de sens commun qui fait en sorte que le savant l'utilisera en priorité sur son savoir scientifique (il sait bien que c'est la terre qui tourne). Mais il arrive, dans certains cas, que des connaissances apprises, qui seraient pourtant utiles à un geste réfléchi, ne soient pas sollicitées et que ce soient celles du sens commun, moins pertinentes, qui soient mobilisées pour l'action.

Nous avons ainsi constaté, comme beaucoup d'autres avant nous, que ce n'est pas parce qu'on possède tel savoir utile à la résolution d'un problème qu'on le mobilisera en temps opportun. C'est, somme toute, un leitmotiv dans l'enseignement que de chercher à ce que les savoirs scolaires que les élèves apprennent puissent être utilisés dans leurs actions quotidiennes.

Or, à la lumière des résultats de nos observations et de récents écrits, nous pensons qu'il faut poser différemment la question des connaissances utilisables et non utilisées. C'est en termes de sens commun que nous avons choisi de poser le problème, qui pourrait s'énoncer comme suit : comment faire en sorte que, dans le cours de leurs actions de sens commun, les élèves consultent leur répertoire de savoirs scolaires ?

C'est à cette question que nous voulons nous attaquer. Sans pour autant le dénaturer, nous pensons qu'il est possible « d'enseigner » au sens commun à freiner son action pour qu'éventuellement, il consulte les savoirs scientifiques appris. Un tel enseignement aurait pour but, en quelque sorte, de munir le sens commun d'une « clochette de vigilance » que le sujet pourrait faire résonner à la porte de son savoir scientifique. Plus spécifiquement, nous voulons évaluer l'impact et la pertinence d'une stratégie socio-didactique visant l'introduction d'un réflexe de vigilance dans le sens commun.

Dans cet article, nous présenterons seulement une petite partie de cette stratégie socio-didactique en nous consacrant surtout au volet didactique de la stratégie. Le levier social ne sera que brièvement évoqué. Soulignons qu'il s'agit d'une étude exploratoire laquelle nous conduira, nous l'espérons, au développement d'un dispositif expérimental plus étoffé.

Nous décrirons tout d'abord la problématique de notre recherche de même que les principaux éléments du cadre conceptuel sur lesquels elle repose. Par la suite, la méthodologie développée sera présentée et seule la partie didactique du dispositif expérimental sera exposée. Quelques résultats issus de cette mise à l'essai seront présentés et analysés. Enfin, nous proposons quelques modifications ou améliorations à apporter au dispositif[1].

PROBLÉMATIQUE ET CADRE CONCEPTUEL

Une observation à l'origine de l'étude

Un paquet est formé de cartes ayant toutes une lettre d'un côté et un chiffre de l'autre. Parmi les cartes suivantes [A] [B] [4] [7], *lesquelles doit-on absolument retourner pour vérifier si la règle « S'il y a un A d'un côté, alors il y a un 4 de l'autre » est bien respectée ?* (Wason & Johnson-Laird, 1972). Ce problème est bien connu des psychologues. Nous l'avons soumis à quelques reprises à des enseignants de mathématiques du collégial de même qu'à des didacticiens des mathématiques. Plusieurs ont répondu qu'il faut retourner les cartes [A] et [4], alors que ce sont plutôt les cartes [A] et [7] qu'il faut retourner. (Derrière le 4 il peut y avoir n'importe quoi, un A ou autre chose ; mais derrière le 7, il faut s'assurer que ce n'est pas un A, puisqu'un 7 derrière un A contreviendrait à la règle.) Ces résultats nous paraissent fort éloquents quant à la non utilisation d'un savoir appris — et en principe disponible — sachant que les sujets interrogés font de l'enseignement des mathématiques leur profession. Nous nous attendions à ce que leurs savoirs mathématiques formels, qu'ils ont bien appris et même qu'ils ont peut-être enseignés, soient mobilisés pour répondre au problème posé. Ça n'a pas été le cas. Une prochaine fois, y penseront-ils ? S'arrêteront-ils pour consulter leur savoir mathématique ?

Victimes d'illusions cognitives ?

Comment se fait-il que ces enseignants de mathématiques n'aient pas mis en œuvre leur savoir ? Étaient-ils victimes de ce que certains qualifient « d'illusions cognitives » ? (Piatelli-Palmarini, 1993 ; Bronner, 2003). De tels phénomènes ont été décrits notamment par des psychologues et des sociologues.

[1] Nous voulons mentionner que certains extraits de ce texte sont repris d'un autre texte des mêmes auteurs : René de Cotret et Larose (sous presse).

Les travaux des psychologues Kahneman et Tversky ont montré que des personnes ferrées en statistiques pouvaient commettre les mêmes erreurs que le citoyen ordinaire face à des problèmes relativement simples mettant en jeu, par exemple, la taille de l'échantillon : « It is apparent that sample size has no effect whatsover on the subjective sampling distributions. Independent groups, faced with problems that differ only in sample size, produce indistinguishable distributions[2]. » (1972, p. 439).

En sociologie, Bronner (2003), dans une étude cherchant à évaluer s'il y avait une corrélation entre le niveau d'étude (la formation académique) et l'illusion cognitive, conclut que « l'erreur cognitive […] contamine de façon généralisée nos esprits et que même de hautes études scientifiques n'immunisent pas nos raisonnements à leur influence. » Des résultats similaires ont été observés en didactique de l'économie, Legardez concluant ainsi une étude sur les représentations sociales en économie :

> *Or, on constate que des savoirs scolaires sont bien enseignés et appris, mais qu'ils restent souvent des savoirs pour l'école et qu'ils sont peu « exportés » vers les savoirs sociaux « citoyens ». Il semble que ces deux genres de savoirs appartiennent à deux mondes qui coexistent sans que des savoirs scolaires interfèrent rapidement et directement avec les savoirs du jeune citoyen* » (Legardez, 2004, p. 660).

Un problème d'enseignement

Ces constatations posent un problème d'enseignement important, lequel peut être formulé en ces termes : comment faire pour que les savoirs scolaires que les élèves apprennent soient « exportés » dans leur quotidien ? Des tentatives de réponses ont été apportées, entre autres par des études en didactique et par l'introduction de programmes d'études formulés en termes de compétences.

Les études didactiques

Des recherches visant en quelque sorte à prendre en compte les connaissances de sens commun dans l'apprentissage de savoirs savants ont été menées, notamment en didactiques des mathématiques et des sciences. Plusieurs recherches se sont consacrées à l'étude des conceptions inadéquates (ou « misconceptions ») des élèves en regard de savoirs donnés. Ainsi a-t-on développé des situations d'apprentissage visant à prendre en compte ces

---

[2] « Il apparaît que la taille de l'échantillon n'a pas d'effet sur la façon dont les sujets se représentent la distribution. Des groupes indépendants, confrontés à des problèmes qui diffèrent uniquement par la taille de l'échantillon, produisent des distributions semblables. » (Notre traduction). Pour mieux saisir cette idée, penchons-nous sur le problème suivant : *Une ville possède deux maternités. L'une grande, où 45 bébés en moyenne naissent par jour, et l'autre petite, où 15 bébés en moyenne naissent par jour. Chaque jour où le seuil de 60 % de garçons est dépassé, la maternité fait une croix dans un carnet. Au bout d'une année, quelle maternité aura le plus de croix dans son carnet ? La petite maternité ? La grande ? Ou bien les deux à égalité ?* À ce problème, inspiré de Kahneman & Tversky (1972) et repris par Bronner (2003), les sujets des deux études répondent majoritairement qu'il y aura égalité entre les deux maternités ou encore, que ce sera la plus grande maternité. Seule une minorité des sujets (de l'ordre de 20 %), peu importe les groupes testés, fournit la bonne réponse, soit la plus petite. La taille de l'échantillon ne semble donc pas faire de différence sur l'évaluation de la probabilité dans l'esprit des sujets. Pourtant, on peut comprendre que la petite maternité a plus de chances que la grande de dépasser le seuil de 60 % puisqu'un garçon de plus dans le cas de la petite maternité fera davantage augmenter le pourcentage que dans celui de la grande.

conceptions inadéquates (parfois dites erronées) et à les faire évoluer vers des conceptions plus proches du savoir savant.

Toutefois, certaines recherches (Legardez 2004, Viennot 1996, Trésarrieu 2000) montrent que, même après un apprentissage « satisfaisant » de savoirs scolaires, les élèves ne mettent pas nécessairement en oeuvre les savoirs qu'ils ont appris dans des problèmes où ils pourraient pourtant y recourir avec succès. Ils reviennent à leurs conceptions spontanées, ou à leur sens commun, pour résoudre les problèmes. Ainsi, un apprentissage jugé satisfaisant et une certaine compréhension des concepts ne semblent pas suffire à *exporter* dans le quotidien l'utilisation du savoir scolaire appris.

L'introduction des compétences

L'introduction des compétences dans les curriculums témoigne aussi d'une volonté de faire en sorte que les savoirs scolaires appris soient exportés vers les savoirs sociaux citoyens. On veut des apprenants compétents, c'est-à-dire qui peuvent utiliser, dans leur quotidien, les savoirs scolaires qu'ils ont appris. « La volonté de faire acquérir aux élèves un pouvoir d'action conduit ainsi à la notion de compétence, laquelle est centrale dans le Programme de formation. » (MEQ 2004, pp. 6-7).

Mais cette volonté ne semble pas suffisante, comme le souligne Perrenoud dans un article sur le développement des compétences : « Même s'il laisse les spécialistes perplexes ou suscite leur critique, c'est le sens commun qui guide les conduites des acteurs […] » (Perrenoud, 1995, p. 85). Jusqu'à présent, il semble que les succès de ces tentatives d'exportation des savoirs demeurent mitigés en ce sens que les concepts, s'ils sont peut-être mieux compris, ne sont toujours pas pour autant utilisés dans le quotidien.

Qu'il s'agisse de didactiques ou de compétences, l'idée principale est de s'assurer que les savoirs scolaires soient utilisés par les apprenants. Les recherches auxquelles nous venons de faire référence ont ceci en commun qu'elles cherchent à exporter les savoirs scolaires appris dans les savoirs quotidiens, sans toutefois y parvenir de manière satisfaisante. Or, nous proposons d'inverser ce point de vue, de prendre l'autre bout de la lorgnette, en demandant au sens commun de solliciter les savoirs scolaires. En d'autres termes, nous cherchons un moyen pour que ce soit le sens commun qui « importe » les savoirs scolaires appris.

Un nouveau cadre de référence : le sens commun

Plusieurs chercheurs se sont penchés sur la définition du sens commun. Nous en avons retenu une, de la sociologue Gueorguieva, qui nous paraît regrouper plusieurs éléments importants et assez consensuels : « … le "sens commun" est un savoir intuitif et immédiat sur ce qui est raisonnable de faire, un savoir qui est culturellement acquis au cours de l'éducation ou de la pratique quotidienne. » (Gueorguieva, 2002, p. 1). Reprenons quelques caractéristiques de cette définition.

Le sens commun : un savoir

Le sens commun comporte des *savoirs et des connaissances*. À cet égard, Gonseth (1993), dans sa description d'un modèle ordinaire du sens commun, souligne que le sens commun est un ensemble d'énoncés disponibles à un lieu et à une époque donnés. Et, qu'on regarde du coté de l'ethnométhodologie (Schmidt, 1990) ou des représentations sociales (Jodelet, 2003 ; Moscovici, 2003), on retrouve aussi le sens commun comme une connaissance ou un savoir en œuvre dans l'action quotidienne.

Le sens commun : intuitif, immédiat et… opposé à la science
Le sens commun est un savoir *intuitif et immédiat*. Toujours selon Gonseth (1993), il se caractérise notamment par le fait d'être dichotomique — ce qui est bien, ce qui est mal — et par le fait d'être nourri de recettes, de« prêts-à-penser » qu'il compare à des proverbes. Ces « prêts-à-penser » s'adaptent au contexte et peuvent donc facilement être contradictoires. Dans telle situation, on dira par exemple que « les contraires s'attirent » et, dans une autre, on se référera plutôt au fait que « qui se ressemble s'assemble ». On peut rapprocher ces caractéristiques du côté immédiat et intuitif du sens commun.

Le sens commun permet d'agir rapidement et ne s'encombre pas de la lenteur d'une rationalité (Berthoz, 2004). On comprend alors pourquoi Bachelard (1938) oppose le savoir scientifique au savoir de sens commun. Selon lui, cette séparation était nécessaire pour permettre la constitution d'un corpus de savoirs savants. Toutefois, une fois ce corpus constitué, le sens commun pourra lentement y puiser quelques éléments au cours de son évolution. On constate par exemple que maintenant, il est de sens commun de considérer que la terre est ronde !

Le sens commun : lié à l'action
Le sens commun est un savoir généralement lié à l'action, il ne s'agit pas d'un savoir de réflexion, même si on peut parfois parler de « raisonnement de sens commun ». C'est un savoir sur ce qui *est raisonnable de faire*, un ensemble de prescriptions pour la conduite au quotidien. Geertz (1983) souligne le caractère pratique du sens commun. On réfèrera aussi au sens commun comme au fondement de l'action sociale ou encore, comme à un raisonnement sociologique pratique (Gueorguieva, 2002).

Le sens commun : un ensemble de représentations sociales
La définition retenue présente le sens commun comme un savoir *culturellement acquis*. Le sens commun se développe par la culture et lui est relatif. Pour Sylvestre (2004), il s'agit d'un ensemble de représentations sociales. Selon lui, le processus d'acquisition du sens commun se confond avec celui de la socialisation. Jodelet caractérise la représentation sociale ainsi : « C'est une forme de connaissance socialement élaborée et partagée, ayant une visée pratique et concourant à la construction d'une réalité commune à un ensemble social. » (Jodelet, 2003, p. 53). Elle ajoute que cette forme de connaissance est également désignée comme « savoir de sens commun ».

À partir de ces caractéristiques du sens commun, voyons comment il est possible d'élaborer une stratégie pour inciter le sens commun à importer des savoirs scolaires.

But de la recherche

Puisqu'il semble que ce soit le sens commun qui régisse nos actions quotidiennes, lesquelles devraient disposer des meilleurs savoirs pour leur réalisation, nous voulons donc porter nos efforts directement sur le sens commun. On sait que les didactiques des disciplines veillent à l'apprentissage de savoirs situés dans le giron institutionnel et que les compétences cherchent à les rendre utilisables. Or, nos premières observations et la littérature entourant les illusions cognitives nous conduisent à penser qu'il faudrait peut-être plutôt viser à ce que le sens commun sollicite les savoirs savants, et tel est notre projet. Pour ce faire, nous allons tenter d'enseigner un savoir qui s'adresserait au sens commun, c'est-à-dire d'y introduire un nouveau « prêt-à-penser ». Mais nous ne pouvons évidemment pas dénaturer le sens commun, puisqu'il demeure un savoir pratique, immédiat, instinctif, construit comme une représentation sociale et donc, partagé par une société. Notre stratégie devra donc prendre en compte ces caractéristiques. Notre recherche vise ainsi deux buts :

- un but *utopique*, qui est de faire en sorte que le sens commun consulte l'esprit scientifique, qu'il importe le savoir scolaire appris ;
- un but *pratique*, qui vise à ce que la personne, dans son rôle de citoyen, se munisse d'une « clochette de vigilance », en d'autres mots qu'elle introduise un doute, une hésitation, par rapport à la validité de son action.

Notre question de recherche est la suivante : comment peut-on entraîner le sens commun à s'arrêter rapidement sachant, comme on l'a mentionné, qu'on ne peut le dénaturer. Le sens commun est immédiat, intuitif, rapide. Peut-on le faire s'arrêter rapidement, dans l'espoir que cet arrêt permette une consultation du savoir appris ? Quatre présupposés sous-tendent notre recherche.

1) D'abord il faut que les savoirs visés soient disponibles chez les sujets de l'expérience. Pour assurer cette condition, nous avons choisi de nous restreindre dans un premier temps à quelques savoirs mathématiques enseignés dans les premières années de la scolarité obligatoire.
2) Ensuite, nous admettons qu'il est possible de mettre en relation le savoir scolaire et le savoir de sens commun, de penser à une importation.
3) Puis, il nous faut aussi admettre que s'arrêter peut conduire à une réflexion.
4) Et finalement, que le sens commun peut évoluer, comme en témoigne par exemple l'acceptation maintenant assez généralisée d'un système héliocentrique.

MÉTHODOLOGIE DE LA RECHERCHE

Conception et mise à l'essai d'une stratégie socio-didactique

Nous voulons introduire un nouveau « prêt à penser » dans le répertoire de sens commun des élèves : « Je pourrais me faire prendre par une illusion cognitive ». À terme, nous souhaitons que ce « prêt à penser » conduise les élèves à se munir d'une « clochette de vigilance », c'est-à-dire d'un détecteur d'illusion cognitive. Comme nous voulons nous adresser au sens commun pour lui enseigner un savoir, notre stratégie aura recours à deux leviers : un levier didactique pour l'enseignement d'un savoir et un levier « social » pour inscrire ce savoir dans le sens commun.

Un levier didactique

La stratégie didactique que nous proposons vise l'apprentissage d'un premier savoir (l'existence d'illusions cognitives) puis, la prise de conscience que « je » suis victime de ces illusions, que j'avais les connaissances pour répondre mieux et enfin, qu'il pourrait en être autrement. Pour réaliser ces prises de conscience, nous allons tendre un piège au sens commun par des problèmes qui déclenchent de mauvaises réponses, jugées bonnes avec certitude par les élèves ; puis nous allons présenter et expliquer la faille du raisonnement. À terme, nous espérons qu'une attitude de vigilance se développe, au sein de la communauté étudiée, comme un savoir pratique de sens commun, un savoir intuitif et immédiat.

Un levier social

Nous voulons faire en sorte que la prise de conscience soit collective pour fournir aux élèves les moyens de transformer cette expérience en savoir de sens commun. Le fait de proposer ce questionnaire à toute une école devrait concourir à provoquer cet effet collectif. Pour nourrir davantage le processus d'apprentissage du sens commun, nous proposerons comme projet aux élèves de garder l'œil ouvert, et d'essayer de repérer des illusions cognitives dans leur entourage, qu'elles soient réellement ou potentiellement observées. Si une telle vigilance face aux illusions cognitives parvient à devenir un projet de toute l'école, alors les mécanismes de pression sociale positive et de facilitation sociale (Zajonc, 1965) devraient jouer leur rôle dans les apprentissages de sens commun visés. Car, tel que le dit Sylvestre, « On peut ainsi considérer que le processus d'apprentissage et de transmission du sens commun se confond avec celui de la socialisation, c'est-à-dire avec l'intégration progressive des individus à une collectivité, à ses croyances, à ses règles […] » (Sylvestre, 2004, p. 130).

Cette prise en compte de l'espace social et du poids des rapports sociaux sur le développement, et éventuellement sur l'utilisation d'un nouveau savoir de sens commun, nous apparaît nécessaire.

Description de l'expérimentation

Dans cet article, nous ne présenterons que la première phase de la partie didactique de la stratégie puisque nous en sommes encore à la recherche de pièges, c'est-à-dire d'items susceptibles de déclencher des illusions cognitives. Nous avons conçu une petite expérimentation qui a pour but, d'une part, de tester la fiabilité de quelques pièges (six) et de quelques leurres (quatre) et d'autre part, de tester les explications qui conduisent à la prise de conscience des illusions cognitives. Les pièges sont des questions auxquelles les sujets fournissent une réponse fausse tout en étant certains qu'elle est juste. Ces pièges visent à déclencher des illusions cognitives. Les leurres, pour leur part, sont des questions auxquelles les sujets répondent correctement et avec certitude.

Dans cette expérimentation, les élèves doivent d'abord répondre aux dix questions (voir questionnaire à l'Annexe) puis, une fois que tous les élèves d'une classe ont répondu à l'ensemble des questions, ils doivent attribuer un degré de certitude à leurs réponses. Ils doivent indiquer par un « C » qu'ils sont certains de la justesse de la réponse ou par un « I » qu'ils en sont incertains (nous inspirant en ceci de Jans et Leclercq, 1999). Nous pouvons donc obtenir les cas suivants : bonne réponse avec certitude, bonne réponse avec incertitude, mauvaise réponse avec incertitude et mauvaise réponse avec certitude. Ce dernier cas, l'illusion cognitive ou méprise grave, est évidemment celui qui nous intéresse.

Nous avons déterminé quatre critères auxquels devait répondre un item pour être qualifié de bon piège : il doit mener à une mauvaise réponse (potentiel d'illusion cognitive), le sujet doit être certain que sa réponse est bonne (degré de certitude), le sujet doit avoir par ailleurs les moyens de bien répondre (disponibilité des savoirs en jeu) et enfin, ces conditions doivent être remplies peu importe la population (variété des sujets). Des critères semblables nous servent à identifier un bon leurre : il mène à une bonne réponse, le sujet est certain que sa réponse est bonne, les réponses sont issues d'une procédure adéquate et enfin, cela se produit peu importe la population.

Nous nous attendons à constater, lors de la présentation des solutions justes qui suivra la réalisation du questionnaire, qu'une majorité d'élèves sera surprise de s'être laissée piéger par certaines questions. Il en ressortira deux conclusions :

1) il existe des illusions cognitives (il ne s'agit pas d'accidents individuels) ;
2) je peux facilement en être victime.

D'autre part, comme les élèves constateront du même coup qu'*ils avaient tous les savoirs nécessaires pour fournir une réponse adéquate*, le conflit ainsi engendré suscitera peut-être le goût de faire quelque chose pour éviter, autant que possible, de se laisser berner par des illusions cognitives. C'est cette prise de conscience collective qui pourra, éventuellement, selon le dispositif social qui devra être mis en place, se transformer en savoir de sens commun et devenir un nouveau « prêt à penser ».

Sujets de l'expérimentation
Afin de répondre autant que possible au quatrième critère, celui de la variété des sujets, nous avons soumis notre questionnaire à une population relativement variée, soit trois classes de niveaux scolaires différents au Québec : une classe de 2^e^ secondaire (33 élèves, 13-14 ans) d'une école publique, une classe de 4^e^ secondaire (35 élèves, 15-16 ans) d'une école privée et une classe de 1^re^ année de Cégep (20 élèves, 17-18 ans) en technique juridique.

Les élèves devaient inscrire, sur une ligne réservée à cette fin au bas du questionnaire, l'heure à laquelle ils avaient terminé de répondre aux questions (voir Annexe). Tel que mentionné plus tôt, quand tous les élèves ont eu complété leur questionnaire, nous leur avons demandé d'inscrire à côté de chacune de leur réponse soit un C pour indiquer qu'ils étaient certains de sa validité, soit un I quand ils s'estimaient incertains de leur réponse.

QUELQUES RÉSULTATS

À propos de la fiabilité des pièges et des leurres

Nous avons regroupé les différentes réponses données par les élèves selon quatre modalité : leur réponse est bonne et ils sont certains de sa justesse (BC), leur réponse est bonne mais ils sont incertains de sa justesse (BI), leur réponse est mauvaise et ils sont incertains de sa justesse (MI) et enfin, leur réponse est mauvaise et ils sont certains de sa justesse (MC). C'est évidemment cette dernière catégorie qui nous intéresse, puisqu'elle ressort des éventuels pièges qui nous permettront de déclencher des illusions cognitives. Une catégorie « Autre » (A) regroupe les réponses qui n'entrent dans aucune des catégories précédentes, par exemple quand l'élève n'a pas inscrit son degré de certitude ou encore, quand il a donné une réponse dont on ne peut juger de la justesse (ex : répondre OUI à la question « Y a-t-il plus de chance d'obtenir un 3 ou un 7 ? »). Rappelons que nous avons soumis un questionnaire de dix questions comprenant quatre leurres et six pièges, répartis selon l'ordre suivant : L-L-P-L-P-L-P-P-P-P.

Le tableau suivant présente les résultats obtenus aux leurres anticipés. Parmi les quatre leurres testés, deux se sont révélés fiables : *Une question d'âge !* et *C'est la fête !* En effet, pour ces deux questions, les élèves ont très majoritairement fourni une bonne réponse avec certitude et ce, de manière assez semblable pour les trois classes. De plus, il nous apparaît raisonnable de présumer que ces réponses reposent sur des justifications adéquates.

Titre et n° des questions	BC	BI	MI	MC	A
Une question d'âge ! (#1)	**82**	2	1	2	1
C'est la fête ! (#2)	**80**	2	3	2	1
On joue aux dés ! (#4)	42	19	9	8	10
Loto 6/49 (#6)	30	30	16	4	8

Tableau 1. Compilation des réponses aux questions « leurres »

Pour le problème *Une question d'âge !*, il suffit de pouvoir conclure que si A > B et B > C, alors A > C (transitivité de la relation d'ordre). Le problème *C'est la fête !*, pour sa part, peut se résoudre soit par la commutativité, $6 \times 12 = 12 \times 6$, soit en calculant le nombre total de bouteilles et en divisant par le nombre de bouteilles par caisse.

Nous avons été un peu surpris des résultats aux deux autres leurres, *On joue aux dés !* et *Loto 6/49*. Les élèves y ont majoritairement bien répondu ; toutefois, ils ont exprimé une forte incertitude, notamment pour leur réponse à *Loto 6/49*. Ce résultat pourrait-il signifier que les élèves se méfient parfois de leur intuition en probabilités, ce qui serait un premier pas vers la vigilance.

Six questions ont été testées afin d'évaluer leur potentiel de pièges. Parmi elles, trois se sont avérées fiables ; il s'agit de : *Une balle une prise*, *Grande vente de printemps* et *Encore des dés !* Le tableau suivant présente la compilation des réponses pour les six questions-pièges testées.

Titre et numéro des questions	BC	BI	MI	MC	A
Une balle une prise ! (#3)	15	5	8	**57**	3
Grande vente de printemps ! (#7)	5	2	25	**55**	1
Encore des dés ! (#10)	4	4	19	**58**	3
Les nénuphars (#5)	8	3	**48**	16	13
Pile ou Face ? (#8)	6	6	**45**	21	10
Couper les cheveux en quatre… (#9)	5	15	**40**	25	3

Tableau 2. Compilation des réponses aux questions « pièges »

Encore ici, on peut dire que les résultats sont assez semblables peu importe la classe en jeu, les élèves plus vieux ne répondant pas mieux que les plus jeunes. Ces six questions conduisent bien à des réponses majoritairement fausses, mais pour les trois dernières du tableau, soit *Les nénuphars*, *Pile ou Face ?* et *Couper les cheveux en quatre…*, les élèves doutent de la justesse de leur réponse. Nous n'avons pas eu la possibilité d'interroger les élèves afin de savoir ce qui les conduisait à cette incertitude. Des entretiens d'explicitation (Vermersch, 1994) pourraient nous éclairer sur les processus d'invalidation que les élèves mettent en œuvre dans ces cas, et ces processus pourraient être mis à profit dans le développement d'une clochette de vigilance.

Pour évaluer la potentialité de piège d'un problème, un des critères est la disponibilité des savoirs en jeu. On peut se demander comment juger de cette disponibilité. Il s'agit d'une question délicate, à laquelle il est difficile de répondre avec certitude. Dans notre expérimentation, nous nous sommes appuyés sur deux indices pour conclure à la probable disponibilité des savoirs en jeu. D'une part, les notions nécessaires à la résolution des pièges identifiés ont normalement été vues par tous les sujets, si l'on se fie aux programmes d'étude ; d'autre part, la réaction des élèves lors de la correction, c'est-à-dire la surprise puis l'admission rapide de l'erreur suivie de la « déception » de s'être laissé prendre, semble témoigner du fait qu'ils avaient bien ce qu'il fallait pour répondre correctement. Évidemment, ce n'est pas parce qu'on reconnaît la justesse et la pertinence du raisonnement produit par le professeur qu'on aurait pu le produire soi-même, aussi les moyens d'évaluation de ce critère restent-ils à parfaire.

À propos du temps de réponse

Lors de l'expérimentation, nous avons demandé aux élèves de noter l'heure à laquelle ils avaient terminé leur questionnaire, ce qui nous a permis de calculer le temps pris par chacun pour répondre à l'ensemble des dix questions. Nous espérions ainsi pouvoir dégager une éventuelle corrélation entre cette durée (pouvant être un indice de doute ou de vigilance) et une évaluation adéquate de la justesse de la réponse. Nos premières analyses ne nous permettent pas de conclure. D'une part, nous n'avions pas les moyens de mesurer la durée pour chacune des questions et d'autre part, la seule mesure du temps global pour répondre au questionnaire n'a pas permis de discriminer suffisamment pour chacune des réponses. Par ailleurs, l'interprétation des durées peut aller dans plusieurs directions : un élève peut répondre rapidement parce qu'il sait vraiment, ou encore parce qu'il se laisse piéger ! Il faudra donc raffiner ces données, notamment en cherchant à avoir la durée pour chacune des questions et peut-être aussi, en complétant par des entretiens d'explicitation auprès des élèves, afin de savoir à quoi a été employé le temps pris pour répondre.

CONCLUSIONS

Dans la suite de cette recherche, il nous faudra trouver d'autres pièges et éventuellement, trouver d'autres modalités de présentation de manière à solliciter plus directement le sens commun et à s'éloigner d'une présentation de type scolaire. On peut par exemple penser à inclure les pièges dans un « récit dont vous êtes le héros », c'est-à-dire en un scénario où le sujet doit prendre des décisions à diverses étapes du récit, lesquelles décisions influencent le déroulement de l'histoire. On peut de la même façon penser à une forme de bande dessinée. Nous voulons aussi présenter nos pièges à des groupes non scolaires tels un groupe sportif ou un groupe culturel, comme une chorale ou une troupe de théâtre, et ce afin d'accéder autant que possible aux actions de sens commun.

Enfin, en cherchant à ce que, dans le cours de son action, le sens commun ***importe*** ou consulte les savoirs scolaires, l'approche adoptée complète les efforts faits en didactique et en sciences de l'éducation pour ***exporter*** les savoirs scolaires appris dans la sphère du sens commun. Une telle collaboration contribuera peut-être à sortir le savoir scolaire de la « connaissance inutile » décrite par Revel (1988) : « Construite pour fonctionner grâce à la connaissance, notre civilisation est-elle viable si elle refuse de s'en servir ? »

BIBLIOGRAPHIE

BACHELARD, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Vrin, Paris.

BERTHOZ, A. (2004). Cité dans : Tous dupés … pour notre bien ! In *Science et vie*, n°1044, septembre, pp. 54-59.

BOUDON, R. (1990). *L'art de se persuader*. Fayard, Paris.

GEERTZ, C. (1983). Common Sense as a Cultural System. In *Local Knowledge : Further Essays in Interpretative Anthropology*, pp. 72-96. Basic Books, New-York.

GONSETH, M. A. (1993). L'ordinaire et son ombre. In *Si… Regards sur le sens commun*, pp. 25-50. J. Haunard et R. Kaehr, éds. Musée d'ethnographie, Neuchâtel.

GUEORGUIEVA, V. (2002). Sept thèses sur le sens commun. In *Altérités* [En ligne], n°3, janvier. http://www.fas.umontreal.ca/anthro/varia/alterites/n3/gueorguieva.html

JACQUARD, A. (1998). *L'équation du nénuphar*. Calman-Lévy, Paris.

JANS, V. et LECLERCQ, D. (1999). Mesurer l'effet de l'apprentissage à l'aide de l'analyse spectrale des performances. In *L'évaluation des compétences et des processus cognitifs. Modèles, pratiques et contextes*, pp. 303-317. C. Depover et B. Noël, éds. De Boeck Université, Bruxelles.

JODELET, D. (2003). *Les représentations sociales*. Presses Universitaires de France, Paris.

KANHEMAN, D. (2004). *Science et Vie,* n°1038, mars.

KAHNEMAN, D. & TVERSKY, A. (1972). Subjective Probability : A Judgement of Representativeness. In *Cognitive Psychology*, vol. 3, pp. 430-454. Academic Press, New York.

LEGARDEZ, A. (2004). L'utilisation de l'analyse des représentations sociales dans une perspective didactique. L'exemple de questions économiques. *Revue des sciences de l'éducation*, Vol XXX, n° 3, pp. 647-665.

MEQ (2004). Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, 1er cycle.

MOSCOVICI, S. (2003). Des représentations collectives aux représentations sociales : éléments pour une histoire. In *Les représentations sociales*, pp.79-103. Sous la dir. de D. Jodelet. Presses Universitaires de France, Paris.

PAULOS, J. A. (1990). *Innumeracy*. Vintage Books, New York.

PERRENOUD, P. (1995). Enseigner des savoirs ou développer des compétences : l'école entre deux paradigmes. In *Savoirs et savoir-faire*, pp. 73-88. Sous la dir. de A. Bentolila. Nathan, Paris.

PIATELLI-PALMARINI, M. (1995). *La réforme du jugement ou Comment ne plus se tromper*. Odile Jacob, Paris.

RENÉ DE COTRET, S. et LAROSE, R. (Sous presse). Les choses que l'on sait et les choses dont on se sert. In *Actes des XXVII*e *Journées Internationales sur la Communication, l'Éducation et la Culture Scientifiques, Techniques et Industrielles*. A. Giordan, J.-L. Martinand et D. Raichvarg, éds. Chamonix 2005, 6 pages.

REVEL, J.-F. (1988). *La connaissance inutile*. Grasset, Paris.

SCHMIDT, A. (1990). *Ethnométhodologie : Regards sur un terrain interdit*. Thèse de sociologie de l'Université de Paris 8, http://www.ai.univ-paris8.fr/corpus/alexand/index.htm

SYLVESTRE, J. P. (2004). Culture, imaginaire social et sens commun. In : *Le sens commun : théories et pratiques*. P. Guenancia et J. P. Sylvestre, éds. Actes du Colloque de Dijon. Centre de recherches Gaston Bachelard sur l'Imaginaire et la Rationalité. Éditions universitaires de Dijon, Collection Écritures.

TRESARRIEU, J. (2000). *Le sens commun*. Mémoire, Académie de Caen. http://www.discip.crdp.ac-caen.fr/phch/college/julien/MEMOIRE/prerepresentation.htm

VERMERSCH, P. (1994). *L'entretien d'explicitation en formation initiale et en formation continue*. ESF Éditeur, Paris.

VIENNOT, L. (1996). *Raisonner en physique. La part du sens commun*. Pratiques Pédagogiques, Éditions De Boeck, Bruxelles.

WASON, P. C. & JOHNSON-LAIRD, P. N. (1972). *Psychology of Reasoning. Structure and Content*. Harvard University Press, Boston.

ZAJONC, R. B. (1965). Social facilitation. *Science*, n°149, pp. 269-274.

sophie.rene.de.cotret@umontreal.ca

real.larose@umontreal.ca

ANNEXE

Reproduction « comprimée » du questionnaire soumis aux élèves

Nom (ou surnom) : ______________________________

1. *Une question d'âge !* Si Alain est plus vieux que Bernard et que Bernard est plus vieux que Claude, Alain est-il plus vieux que Claude ?

   Réponse : ____________________

2. *C'est la fête !* En prévision d'une fête, vous avez besoin de 6 caisses de 12 petites bouteilles de jus. Au magasin, il ne reste que des caisses de 6 petites bouteilles. Combien devrez-vous alors acheter de caisses de 6 petites bouteilles ?

   Réponse : ____________________

3. *Une balle une prise !* Un bâton de base-ball et une balle coûtent 1,10$ au total. Le bâton coûte 1$ de plus que la balle. Combien coûte la balle ? (Kanheman, 2004).

   Réponse : ____________________

4. *On joue aux dés !* En lançant 2 dés, y a-t-il plus de chances d'obtenir une somme de 3 ou une somme de 7 ?

   Réponse : ______________________

5. *Les nénuphars.* Dans un lac hypothétique, chaque jour des nénuphars procréent chacun un autre nénuphar. Le premier jour il y a 1 nénuphar, le second jour 2, le troisième 4... La dimension du lac est telle qu'au bout de cent jours, sa surface est entièrement recouverte. Au bout de combien de jours la surface d'eau libre représente-t-elle encore la moitié du lac ? (Jacquard, 1998).

   Réponse : ______________________

6. *Loto 6/49.* De tous les tirages de loto 6/49 qu'il y a eus au Québec, pensez-vous qu'il y a eu plus souvent un billet gagnant avec les numéros qui se suivent ou qui ne se suivent pas ?

   Réponse : ______________________

7. *Grande vente de printemps !* Pour attirer la clientèle, un marchand offre un rabais de 20% sur toute sa marchandise. Si la taxe est de 15%, est-il plus avantageux pour vous que celle-ci soit appliquée avant ou après le rabais ?

   Réponse : ______________________

8. *Pile ou Face ?* On vous informe qu'une pièce de monnaie est truquée. Pile a 8 chances sur 10 de se produire, tandis que Face a 2 chances sur 10. Quelles prédictions de P et de F proposez-vous pour les 10 prochains lancers afin d'avoir la bonne prédiction le plus souvent possible ?

	1er	2e	3e	4e	5e	6e	7e	8e	9e	10e
P ou F										

9. *Couper les cheveux en 4…* Sachant que l'on peut trouver sur une tête un maximum de cinq cent mille cheveux, que diriez-vous de l'affirmation suivante : À Montréal, il y a au moins 2 personnes qui ont le même nombre de cheveux. (Paulos, 1990).

   L'affirmation est vraie : ___
   L'affirmation est fausse : ___
   On ne peut le savoir sans le vérifier dans les faits : ___

10. *Encore des dés !* Pierre et Marie jouent aux dés. Marie choisit deux chiffres que l'on retrouve sur les faces d'un dé ; 2 et 4 par exemple. Puis, elle lance la paire de dés. À chaque lancer, Marie parie 1$ qu'une de ces deux faces ou les deux faces choisies sortiront. Qui de Marie ou de Pierre a le plus de chances de gagner? (Boudon, 1990).

    Réponse : ______________________

Heure à laquelle j'ai terminé de répondre aux questions :

Merci beaucoup de votre participation !

Un cadre théorique pour éclairer l'apprentissage des probabilités à l'école primaire : vers une prise de décision à l'égard des jeux de hasard et d'argent

ANNIE SAVARD **UNIVERSITÉ LAVAL**

LUCIE DEBLOIS **UNIVERSITÉ LAVAL**

« Avec mes gains au casino, je me suis acheté une casquette de yachtman ; avec mes pertes, j'aurais pu me payer le bateau. »

Paul Bernard

RÉSUMÉ. Les jeux de hasard et d'argent constituent des pratiques sociales largement répandues. Leur popularité croissante auprès des jeunes devient un problème social de grande échelle. Cette problématique peut servir d'ancrage à des apprentissages mathématiques contextualisés, permettant de réfléchir de façon critique à ces activités. Ce contexte d'apprentissage met en lumière tout le défi de la réforme de l'éducation à contextualiser des apprentissages scolaires, par la prise en compte des conceptions sociales et des conceptions de la didactique.

INTRODUCTION

Dans le cadre de cette recherche, nous nous sommes intéressées à l'apprentissage des probabilités à l'école primaire. Cet apprentissage vise le développement d'une pensée critique envers les jeux de hasard et d'argent. Nous espérons que les élèves puissent prendre une décision éclairée quant à leur éventuelle participation à des jeux de hasard et d'argent. Cet article présente donc la problématique d'un point de vue social et d'un point de vue didactique. Nous aborderons en premier lieu la problématique sociale des jeux de hasard et d'argent ainsi que les conceptions des élèves envers ces activités, telles que perçues par les chercheurs en psychologie (Ferland et al., 1999 ; Frank & Smith, 1989 ; Herman et al., 1998 ; Langer & Roth, 1975). Nous discuterons ensuite de prévention, ce qui nous conduira à discuter du cours de mathématique.

En second lieu, l'enseignement et l'apprentissage des probabilités seront situés dans le contexte scolaire québécois du primaire. Les conceptions des élèves envers les probabilités seront traitées sous la perspective de la recherche en éducation. Nous présenterons une modélisation ethnomathématique, conduisant à jeter un pont entre les conceptions des élèves du point de vue de la recherche en psychologie et de la recherche en éducation. Nous terminerons par une brève introduction du savoir mathématique en jeu : les probabilités.

1. LE PROBLÈME D'UN POINT DE VUE SOCIAL

1.1. Le *gambling* chez les jeunes

La promotion accrue des jeux de hasard et d'argent amène un intérêt grandissant auprès des jeunes envers ces activités qui sont socialement acceptées (Becona, 1997 ; Ferland, 2002 ; Jacobs, 2000). Les jeunes ne sont toutefois pas toujours en mesure d'évaluer les faibles probabilités de gagner ainsi que les risques inhérents à ces jeux, ce qui les rend davantage prédisposés à l'influence des promotions (Stinchfield & Winters, 1998). L'attraction de ces jeux peut conduire les jeunes à développer une dépendance entraînant des problèmes personnels et sociaux (Griffiths, 1995). Les jeunes joueurs à problèmes éprouvent, comme les adultes, des difficultés personnelles, familiales, scolaires, légales ou professionnelles, car leurs habitudes de jeu les poussent à adopter des comportements déviants comme le mensonge et le vol. La consommation de substances illicites, l'abus d'alcool, l'absentéisme scolaire, de faibles résultats académiques et le fait de commettre des délits comme le vol et le vandalisme constituent quelques-uns des comportements adoptés parmi les adolescents dépendants du jeu (Chevalier et Allard, 2001 ; Dickson et al., 2004 ; Fisher, 1992 ; Griffiths et Wood, 2000 ; Proimos et al., 1998 ; Winters et al., 1993 ; Wynne et al., 1996). L'initiation précoce aux jeux de hasard et d'argent augmente les risques de dépendance à l'adolescence et à l'âge adulte (Gupta & Deverensky, 1998a ; Jacobs, 2000 ; Ladouceur et al., 2003 ; Lesieur & Klein, 1987 ; Winters et al., 1993).

Pour définir l'appellation de *jeux de hasard et d'argent*[1], nous avons consulté des travaux de chercheurs en psychologie (Ferland, 2002 ; Ladouceur, 2000), qui les définissent comme « [...] une activité dont l'issue repose principalement ou totalement sur le hasard, et implique au préalable une mise irréversible d'argent ou celle d'un objet de valeur » (Arseneault et al., 2001). D'autres chercheurs (Chevalier et al., 2003) mentionnent que cette appellation recouvre « […] l'ensemble des jeux où des paris sont placés, qu'il s'agisse de paris sous forme d'argent, d'objets ou d'actions. Ces jeux peuvent être basés purement sur du hasard ou nécessiter certaines habiletés » (p. 176). Fait intéressant, ces chercheurs incluent des actions qui peuvent faire l'objet de paris. Le hasard est ici défini comme « […] tout évènement imprévu ou imprévisible sur lequel une personne n'a aucun pouvoir » (Ladouceur, 2000, p. 165). Il y a donc une mise irréversible, un objet, de l'argent ou une action, que l'on peut perdre ou gagner et l'issue repose en totalité ou en partie sur le hasard. La notion de hasard implique l'impossibilité de prédire (ou de contrôler) avec certitude l'issue du jeu, même si ce jeu implique des habiletés ou de l'adresse de la part des joueurs, comme certains jeux de cartes.

Gupta et Derevensky (1998b) sont d'avis que chez les adolescents, le statut de joueur social, c'est-à-dire qui joue occasionnellement pour se divertir, se change rapidement en celui de joueur à problème, qui joue pour recouvrer ses pertes. Apparemment, les jeunes auraient tendance à développer un intérêt grandissant envers ces activités, ce qui aurait pour effet d'accroître la participation et même les mises. Ils se mettent alors à adopter des

[1] Les chercheurs et les spécialistes des jeux de hasard et d'argent utilisent le terme anglais *gambling* pour parler de ces activités. Nous n'avons pas trouvé d'équivalent français pour ce mot. Alors qu'en français, nous disons jeux de hasard et d'argent, les anglophones émettent une distinction entre *gambling* et *gaming*. Nous utiliserons parfois le terme *gambling*, puisque ce terme est universellement reconnu.

comportements de joueurs à problèmes (Hardoon et al., 2003). Malgré ces résultats troublants, le *gambling* chez les jeunes ne semble pas être une problématique très connue, contrairement aux autres dépendances chez les jeunes. Il semble plutôt difficile d'identifier les adolescents joueurs, car les manifestations extérieures ne sont pas apparentes, contrairement à d'autres types de dépendance comme l'usage du tabac, la consommation d'alcool ou de substances illicites (Lesieur & Klein, 1987). Pourtant, le taux de joueur chez les adolescents dépasse celui des adolescents qui fument la cigarette, celui des adolescents qui boivent de l'alcool, et celui des adolescents qui consomment des substances illicites (Gupta & Deverensky, 1998a).

Pour plusieurs chercheurs, le comportement qui consiste à jouer à des jeux de hasard et d'argent débute avant l'adolescence, c'est-à-dire avant l'âge de douze ans (Griffiths, 1995 ; Griffiths & Wood, 2000 ; Gupta & Deverensky, 1998a ; Ladouceur et al., 1994 ; Tremblay et al., 1998 ; Wynne et al., 1996). Généralement, les premières expériences de *gambling* chez les enfants tendent à se produire selon certaines circonstances : l'opportunité et la facilité de parier de petits montants d'argent, le climat et l'environnement social qui accepte et favorise la participation à ces activités, ainsi que des règles de jeu à la portée de la compréhension des enfants (Jacobs, 2000). Ces activités se déroulent autour de l'enfant et celui-ci est alors invité à se joindre au groupe de joueurs (famille et pairs) dans le but de se divertir.

Une importante étude de Ladouceur, Dubé et Bujold (1994) réalisée dans la région de Québec auprès de 1320 élèves de niveau primaire (8 à 12 ans), révèle que 86% des élèves ont déjà gagé de l'argent et que 37% d'entre eux ont misé un objet important pour eux. Certains enfants auraient même gagé de fortes sommes pour leur âge, alors que d'autres (plus de 40%) jouent au moins une fois par semaine. Les travaux de Felsher et al. (2004) sur les loteries révèlent que l'âge moyen des enfants jouant aux « gratteux » est de 10 ans, de 11 ans pour les billets de tirage et de 12 ans pour les billets de loteries sportives. Cette forme de loterie est la plus populaire parmi les jeunes de tous les âges et selon leur degré d'implication dans les activités de *gambling* (Felsher et al., 2003). Les loteries sont pour plusieurs jeunes la première introduction aux jeux de hasard et d'argent. Étant donné que les jeunes se perçoivent comme invulnérables et que les risques associés aux loteries sont perçus comme négligeables, la popularité de celles-ci, alimentée par la promotion et la publicité, est très forte. C'est pourquoi elles ne sont pas perçues, par les jeunes comme par les parents, comme des formes de *gambling*, mais plutôt comme du divertissement. La disponibilité et l'accessibilité sont des facteurs à considérer. Soulignons que les enfants, malgré la législation en vigueur, sont capables d'acheter leurs billets eux-mêmes, sans grandes difficultés. Ils connaissent la loi par les avertissements provenant des publicités des loteries, publicités qu'ils récitent et reconnaissent en voyant les billets, mais ils croient que ces avertissements ne concernent pas ces billets spécifiquement (Felsher et al., 2004).

1.2. Les conceptions des élèves d'un point de vue social

Des chercheurs se sont interrogés sur le phénomène d'illusions de contrôle (Langer & Roth, 1975) chez les enfants, puisque les joueurs adultes et les joueurs adolescents essaient de contrôler l'issue des jeux de hasard et d'argent. Une expérimentation conduite par Frank et Smith (1989), auprès de 66 enfants de 9 à 11 ans, révèle que les enfants aussi entretiennent certaines conceptions[2] sur l'illusion de contrôle. L'expérimentation consistait en un jeu de lancers à pile ou face et elle comprenait 30 lancers. Ce jeu était truqué : un tiers des enfants gagnait dès le début pour perdre vers la fin (*descending*), un autre tiers perdait dès le début pour gagner vers la fin (*ascending*), alors que le dernier tiers vivait une séquence plus équilibrée, c'est-à-dire plus aléatoire (*random*). Les enfants qui gagnaient au début de la séquence de jeu et qui perdaient vers la fin donnaient davantage de réponses en lien avec leurs habiletés que les enfants qui perdaient en début de jeu. Cependant, les deux tiers de ceux-ci croyaient que la pratique améliorerait leur performance.

Herman et al. (1998) se sont intéressés aux perceptions des jeunes de 7 à 14 ans envers les loteries. Les 167 jeunes interrogés ont dit préférer les séquences désordonnées à celles ordonnées (3-4-5-6-7-8), comme d'ailleurs les adultes interrogés par Ladouceur (1994) ou par Holtgraves et Skeel (1992). Cependant, les plus jeunes avaient tendance à choisir leurs numéros de façon aléatoire, alors que les plus vieux choisissaient leurs numéros avec soin, afin de « favoriser le hasard ». Ils usaient de stratégies en cherchant des règles prédictibles, reflétant une illusion de contrôle. Les plus jeunes considéraient chaque billet comme également chanceux. Des résultats similaires ont été trouvés par Deverensky et al. (1996) et par Gupta & Deverensky (1996), envers les conceptions des jeunes à l'endroit du hasard. Les plus jeunes reconnaissent certains éléments d'habileté à des jeux comme le black-jack, la roulette et les machines à sous, mais sont d'avis que le hasard est déterminant. Les jeunes auraient donc une vision plus réaliste du hasard que les adolescents.

Une étude inédite sur l'enseignement des probabilités dans une classe de quatrième année, auprès d'élèves de 9 à 10 ans, a été conduite par DeBlois et Savard (2004). Une première analyse suggère que certains enfants croient que les faibles chances de gagner à la loterie sont dues au grand nombre de participants à ce jeu, mais que c'est tout de même possible de gagner. Le peu de chance de gagner prend beaucoup d'importance. Des questions sont formulées à l'égard des probabilités de gagner et du nombre de billets vendus. Concernant les tirages au sort, les enfants croient qu'un tirage au sort est juste si les billets sont d'égales grandeurs. Un billet plus grand aurait plus de chance d'être attrapé lors de la pige.

Un entretien de groupe a été réalisé auprès de dix enfants âgés de 9 à 12 ans par Ferland et al. (1999) sur les jeux de hasard et d'argent. Le concept de *gambling* semblait bien compris par eux, mais ils avaient tendance à oublier la perte financière comme conséquence probable, voyant l'activité comme un moyen facile d'obtenir de l'argent et d'avoir du plaisir. Les paris sportifs semblaient avoir la cote de popularité parmi ces

---

[2] La terminologie employée par le domaine de la psychologie cognitive diffère un peu de celle utilisée sous le paradigme socioconstructiviste des sciences de l'éducation. Sous ce paradigme, les conceptions ne sont pas erronées, mais plutôt alternatives, puisque qu'une conception peut sembler viable selon certains contextes et se révéler inadéquate selon d'autres contextes. Ainsi en est-il lors de l'analyse de la production d'erreurs chez les élèves. Pour notre part, nous considérons les conceptions comme alternatives. Le terme de conceptions erronées est employé dans ce texte dans le but de rester fidèle aux auteurs qui l'emploient. Notons cependant que la perspective des chercheurs en psychologie implique que ces conceptions doivent être corrigées, alors que notre perspective implique qu'elles évoluent. La prise en compte de ces différences doit être claire, car ces différences se répercutent également au plan méthodologique.

enfants, alors qu'ils ont affirmé que les jeunes de leur âge ne jouaient pas[3], que c'était plutôt les adolescents qui jouaient. Ils se représentaient des joueurs excessifs comme un adulte qui parie à des courses de chevaux ou qui joue dans des casinos. Un seul des participants a mentionné des risques de dépendance, les autres ne voyant que des aspects positifs.

1.3. Une nécessaire prévention

La prévention semble être un moyen adéquat pour réduire les conséquences négatives du jeu et intervenir avant que les habitudes de jeu ne s'installent, d'autant plus que ce problème semble réfractaire au traitement (Ladouceur, 1994). Les chercheurs en psychologie (Jacobs, 1989, 2000 ; Ladouceur, 1994 ; Wynne et al., 1996) sont d'avis qu'un mouvement préventif doit intervenir tôt, dès l'école primaire en fait. Certains, dont Gupta & Deverensky (1998a) ainsi que Korn & Shaffer (1999), croient que ce mouvement de prévention doit posséder son propre curriculum pour l'élémentaire et pour le secondaire et que celui-ci pourrait s'incorporer dans le programme scolaire, soit dans le programme sur la santé, soit celui des mathématiques.

Shaffer (2003) a fait des recherches auprès de 801 élèves du secondaire. Ses résultats suggèrent que les élèves davantage intéressés par les mathématiques participaient peu aux activités de *gambling*, avaient peu d'amis qui y participaient et percevaient ces activités comme dangereuses. Ces constatations l'ont amenée à penser que les enseignants peuvent jouer un important rôle dans la prévention du *gambling* chez les jeunes. L'intégration des éléments de prévention dans le curriculum de probabilités et de statistiques pourrait accroître l'intérêt des jeunes envers les mathématiques par des thèmes de la vie quotidienne et présenter les activités de *gambling* comme des activités non pas gagnantes, mais perdantes. McEvoy (1991) suggère que les messages de prévention s'effectuent tôt à l'intérieur du curriculum de mathématique et soient présentés à petites doses et à chaque année. L'enseignement des probabilités pourrait être un moment propice de prise de conscience des faibles probabilités de gagner. Crites (2003) est d'avis que des discussions sur le sens des nombres permettraient peut-être une prise de conscience du fait que jouer de l'argent appauvrit à long terme. Selon lui, les cours de mathématiques présentent un contexte spécifique pour étudier les jeux de hasard et d'argent, et permettre ainsi de discuter des conceptions erronées envers les activités de *gambling*. Les enseignants peuvent intégrer des discussions sur la chance pendant les cours sur les probabilités et ainsi envoyer un message social : le *gambling* est une activité perdante. En effet, dans toutes les activités, la cote est contre le joueur. Les jeunes doivent se préparer à perdre à long terme, c'est pourquoi l'auteur recommande d'encourager les jeunes à penser de façon plus critique envers ces activités. De plus, il importe d'éclairer les enfants sur les pièges que renferment les différents jeux de hasard et d'argent afin de « [...] leur permettre de prendre une décision éclairée quant à une éventuelle participation » (Ferland, 2002, p. 6). Soulignons d'ailleurs qu'une meilleure compréhension du hasard fait partie du traitement des joueurs pathologiques. Cependant, une mise en garde s'impose : certains utilisent justement des connaissances mathématiques pour jouer. En effet, il existe sur le marché

[3] Parier n'est pas jouer pour ceux-ci. S'agirait-il d'une confusion entre les jeux (*gaming*) et les jeux de hasard (*gambling*) ?

des livres et des logiciels informatiques pour les joueurs, qui choisissent leurs numéros de loterie en fonction des probabilités et des statistiques. Ces outils entretiennent la non reconnaissance de l'indépendance des tours. Encore ici, une meilleure compréhension du hasard permettrait peut-être une prise de conscience envers ces activités : à savoir, l'espérance de gain négative.

En effet, la prise de décision éclairée sur la participation ou non aux jeux de hasard et d'argent est un des buts que nous poursuivons. Nous désirons que les jeunes soient plus critiques envers ces activités. Nous croyons que l'abstinence est un moyen efficace de prévenir les problèmes de jeu, mais devant la variété, l'attrait et la popularité des activités de jeu, il nous semble utopique de croire que tous les enfants s'abstiendront de jouer. C'est pourquoi la prévention se veut aussi axée sur la réduction des conséquences négatives du jeu, c'est-à-dire axée sur le jeu responsable et modéré. Ainsi, un enfant peut très bien participer à un jeu et se retirer rapidement de la partie. C'est vers cette prise de décision que tendent nos interventions comme enseignante et chercheure. La combinaison d'éléments de l'abstinence et des moyens de réduction des conséquences négatives du *gambling* peut ainsi accroître l'efficacité de la prévention et se révéler féconde (Deverensky & Gupta, 2004). Nous désirons que les jeunes participent activement à ce mouvement de prévention en ayant les habiletés et la permission de faire leurs propres choix concernant leur participation aux activités de *gambling* (Dickson et al., 2004), c'est-à-dire en pensant de façon critique. C'est pourquoi nous posons comme question de recherche : Comment un enseignement qui favorise l'apprentissage des probabilités ainsi que le développement d'une pensée critique envers les jeux de hasard et d'argent peut-il influencer la prise de décision envers une éventuelle participation à ces activités ?

2. LE PROBLÈME D'UN POINT DE VUE DE LA RECHERCHE EN ÉDUCATION

2.1. Le contexte scolaire québécois de l'enseignement des probabilités

Penchons-nous brièvement sur le contexte québécois de l'enseignement des probabilités au primaire, qui est mis de l'avant dans le nouveau *Programme de formation de l'école québécoise* (2001). L'ancien programme les abordait de façon sommaire : il s'agissait principalement de vérifier expérimentalement des cas de probabilités connus (intuitivement). L'enseignement était proposé dans les classes de cinquième et de sixième année. Dans les faits, les quelques objectifs associés aux probabilités ne faisaient pas toujours l'objet d'un enseignement (Caron, 2004). Le nouveau programme propose un enseignement plus approfondi et systématique de ce concept et ce, à tous les cycles du primaire, c'est-à-dire dès la première année. Les probabilités font partie des savoirs essentiels de ce programme.

2.2. Les conceptions des élèves d'un point de vue didactique

Les travaux de Piaget et Inhelder (1951) sur l'idée de hasard ont permis de définir le développement de la pensée probabiliste en trois étapes : à la première étape (moins de 7 ans), il y a une absence de pensée probabiliste systématique, car l'enfant ne peut faire la distinction entre un évènement certain et un évènement possible. À la deuxième étape (entre 7 et 14 ans), il peut faire cette distinction, mais la difficulté réside dans la méthodologie pour dresser tous les cas possibles. C'est le début de la quantification des probabilités. À la troisième étape (14 ans et plus) l'élève construit le concept de *rapport*, qui est essentiel à la compréhension des probabilités, et il parvient à les quantifier. Le concept de rapport s'inscrit à l'intérieur de l'organisation mathématique de l'arithmétique élémentaire : la proportionnalité (Comin, 2000). Au primaire, les proportions sont abordées comme une relation (rapport). Cette relation se veut qualitative au départ pour en venir à l'introduction des nombres. Selon Comin (2000), la comparaison est plus aisée quand les objets ont une « qualité »[4] commune (une variable) : « On peut alors leur associer une "quantité"[5] qui est l'idée de grandeur (longueur, volume, masse, …) » (p. 184). Il devient donc possible de comparer numériquement des objets. En ce qui a trait aux probabilités, la comparaison constitue l'ancrage de l'évaluation d'une possibilité.

Notons que les situations proposées aux élèves par Piaget et Inhelder (1951) visaient à connaître la compréhension des enfants et non à proposer un apprentissage. À cet effet, une vaste étude de Green (1988, cité par Shaughnessy, 1992) a permis d'interroger 3000 élèves de 11 à 16 ans pour vérifier les travaux de Piaget et Inhelder (1951) et pour connaître ce qu'ils savent, sur les concepts de probabilité et sur le vocabulaire. L'expérimentation consistait à reprendre certaines tâches proposées par Piaget et Inhelder (1951), notamment avec des billes et des roulettes. L'expérimentation des gouttes de pluie a été modifiée en une tâche qui ne nécessitait pas des connaissances sur les précipitations, simplifiant ainsi la situation pour les élèves (Batanero et al., 1998). Green a constaté que :

1) le concept de rapport est essentiel pour une compréhension du concept de probabilité ;
2) les élèves ont de la difficulté à comprendre et à utiliser le vocabulaire associé aux probabilités comme « certain », « probable », etc. ;
3) un enseignement systématique est nécessaire pour complexifier leurs conceptions de la notion de probabilité.

Fischbein et Schnarch (1997) ont conduit une recherche sur des conceptions[6] d'élèves, conceptions qu'ils ont appelées erronées. Ils ont enquêté auprès d'une centaine d'élèves, âgés entre 10 et 18 ans. Ces élèves, bien que scolarisés, n'avaient pas appris les probabilités à l'école. De ces élèves, vingt étaient en cinquième année, vingt étaient en septième année, vingt étaient en neuvième année, vingt étaient en onzième année et dix-huit fréquentaient le collège. Un questionnaire comportant sept questions a été administré à ces élèves[7]. Chaque question mettait des conceptions en relief. Les résultats montrent que la représentativité, c'est-à-dire la tendance à estimer la probabilité d'un évènement en tenant compte de la façon dont il représente certains aspects de sa population, décroît avec l'âge. La question posée aux élèves consistait à leur demander quelle séquence à la loterie avait le plus de chance de gagner, entre 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 39, 1, 17, 33, 8, 27. Les élèves ont opté majoritairement pour la seconde séquence, alors que les deux ont la même probabilité de gagner. Une deuxième tâche proposait d'identifier le quatrième lancer d'une séquence de piles ou faces, et dans laquelle « face » est obtenu trois fois. Les résultats montrent que

[4] Les parenthèses sont de l'auteur.
[5] Les parenthèses sont de l'auteur.
[6] Peu de recherches abordent les conceptions des élèves. Une grande partie des travaux consultés s'intéressaient au développement d'un raisonnement probabiliste et aux intuitions des élèves.
[7] Des contraintes méthodologiques nous incitent à n'en présenter que quelques-unes.

les élèves ne tenaient pas compte de l'indépendance des tours et qu'ils cherchaient peut-être à égaliser les résultats (50/50). Les auteurs parlent ici des effets trompeurs de la recension, qui peut être positive (les chances sont plus grandes d'obtenir pile) ou négative (les chances sont plus petites d'obtenir pile), alors que les chances sont égales. Une troisième tâche consistait à répondre à la question suivante : Suppose qu'une personne lance deux dés simultanément. Qu'est-ce qui a le plus de chances de se produire ? Parmi le choix de réponse, on retrouvait : A) obtenir 5 et 6 ; B) obtenir 6 et 6 ; C) les deux ont les mêmes chances ; D) autres réponses. Majoritairement et ce, dans tous les groupes d'âge, les élèves ont répondu que les chances étaient égales alors qu'il y a plus de probabilités d'obtenir 5 et 6 (2 chances sur 36). Il semble donc y avoir ici une confusion entre un évènement simple et un évènement composé. Cependant, le manque de clarté de la tâche en lien avec les réponses proposées peut avoir eu une incidence sur les résultats. Ainsi, les élèves ayant répondu « autres réponses » ont donné une réponse correcte selon nous[8]. Il devient donc intéressant de comparer les conceptions des élèves d'un point de vue de la didactique et les conceptions des élèves d'un point de vue social. Pour ce faire, nous utiliserons une modélisation issue du courant ethnomathématique.

3. UN MODÈLE ETHNOMATHÉMATIQUE

Les mathématiques sont une activité humaine et elles peuvent être perçues comme un outil d'analyse des questions sociales et politiques. Cet outil d'analyse permet le développement d'une pensée critique envers des phénomènes sociaux et politiques (Mukhopadhyay & Greer, 2001). Cette posture implique que ce qui est mis de l'avant en mathématiques est culturellement déterminé et qu'en ce sens, une contestation est possible. Cependant, une vision contraire est plutôt répandue dans les sociétés occidentales : celle de mathématiques constituées de calculs et de formules appelant des réponses exactes et infaillibles, ne devenant par le fait même accessibles qu'aux experts seulement. Elles deviennent alors mécaniques, détachées, sans émotions, figées, neutres et incontestables, sans lien aucun avec les aspects de la vie quotidienne.

Opposés à cette perspective, Mukhopadhyay et Greer (2001) soutiennent plutôt que les aspects de la vie quotidienne doivent être liés avec les formalisations mathématiques, car à travers les mathématiques, on tente de comprendre le monde. C'est pourquoi ces auteurs ont élaboré un modèle ethnomathématique, qui jette un pont entre des aspects du monde physique et social et les mathématiques, comme ensemble de structures formelles (*a set of formal structure*). Les conceptions, d'un point de vue social, empruntent ce pont pour se mettre ainsi sur un même plan que les conceptions d'un point de vue didactique. Dès le départ, des aspects étudiés provenant du « monde réel »[9] sont quantifiés avant d'être modélisés sous une forme mathématique. La modélisation implique la prise en compte des relations entre les variables quantifiées. Des procédures mathématiques sont utilisées pour arriver à un résultat, qui sera ensuite interprété et évalué dans le contexte étudié, permettant une réflexion critique sur le processus ainsi que sur le phénomène étudié.

---

[8] Un effet du contrat didactique ?

[9] Les auteurs de ce modèle utilisent le terme réalité ou monde réel. Nous considérons que la « réalité » est construite et interprétée par les individus selon « une organisation de leur vision » (Fourez et al., 1997), c'est pourquoi nous préférons utiliser des guillemets pour employer cette expression.

Illustrons une utilisation possible de ce modèle ethnomathématique à l'aide de l'enseignement des probabilités au primaire. Le contexte sociopolitique, qui emboîte le contexte socioculturel, englobe un plus haut niveau de modélisation. Il incorpore les buts poursuivis par l'enseignant ainsi que les ressources disponibles dans le milieu. En outre, l'enseignant demeure critique face au modèle. Les buts poursuivis par celui-là pourraient être l'apprentissage des probabilités comme contribution au développement d'une pensée critique, dans le contexte de la problématique des jeux de hasard et d'argent. L'emboîtement proposé conduit à positionner la situation d'enseignement/apprentissage dans un contexte socioculturel. Ce contexte englobe un contexte mathématique. Prenons l'exemple d'un jeu de dés. La modélisation mathématique pourrait alors correspondre aux probabilités. Les résultats obtenus lors d'une situation d'enseignement/apprentissage pourraient être interprétés et évalués à la lumière de certaines caractéristiques des jeux de hasard et d'argent, favorisant ainsi le développement d'une pensée critique. Les résultats obtenus seraient alimentés par la prise en compte du contexte socioculturel, c'est-à-dire la promotion de ces jeux et leurs conséquences possibles. Dans cette perspective, la compréhension du contexte et l'interprétation des résultats mathématiques élargissent l'interprétation mathématique et montrent les mathématiques comme une activité humaine. Les mathématiques et les jeux de hasard sont alors socialement situés et peuvent être discutés et critiqués. La figure 1 illustre l'emboîtement proposé par les auteurs :

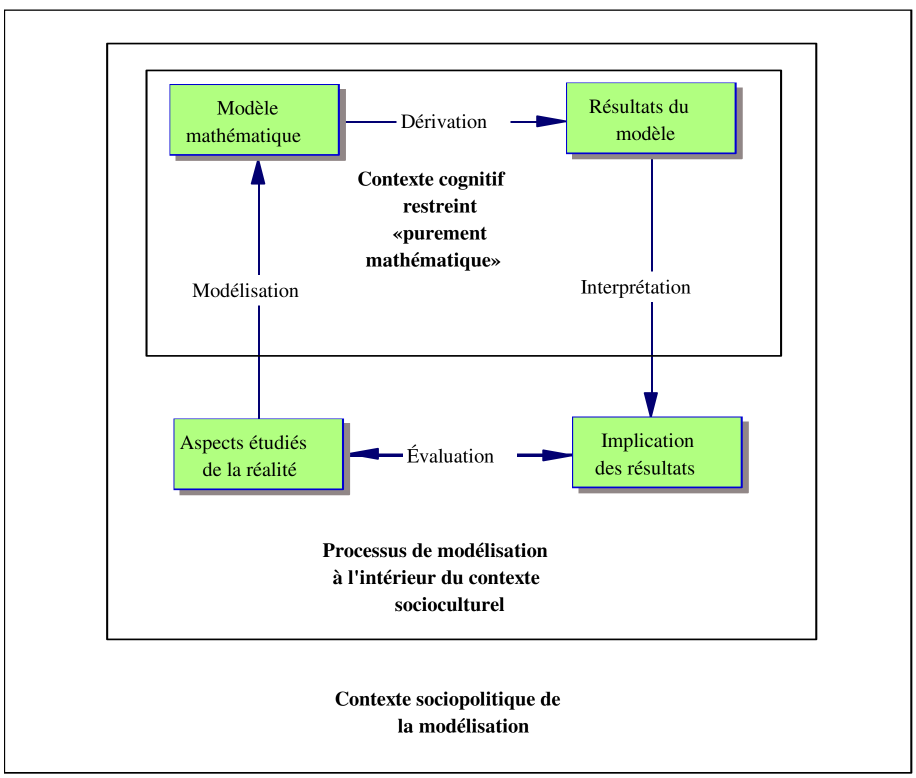


Figure 1. Perspectives d'une modélisation des mathématiques scolaires (Mukhopadhyay et Greer, 2001)

CONCLUSION

Ce projet de recherche s'ancre dans une perspective sociale problématique. Nous constatons que les conceptions des élèves envers les activités de *gambling* telles que perçues par les chercheurs en psychologie présentent une adéquation avec celles perçues par les chercheurs en éducation. Dans ce contexte théorique, il nous apparaît pertinent d'aborder l'apprentissage des probabilités via des mises en situation de certaines activités de jeux de hasard, puisque nous voulons savoir comment un enseignement qui favorise l'apprentissage des probabilités ainsi que le développement d'une pensée critique envers les jeux de hasard et d'argent peut influencer la prise de décision envers une éventuelle participation à de telles activités. Un pont est créé entre les mathématiques, comme moyen pour donner un sens aux aspects du monde physique et social, et les mathématiques comme ensemble de structures formelles (*a set of formal structure*).

BIBLIOGRAPHIE

ARSENEAULT, L., LADOUCEUR, R. et VITARO, F. (2001). Jeu de hasard et consommation de substances psychotropes : Prévalence, coexistence et conséquences. / Gambling and Consumption of Psychotropic Drugs : Prevalence, Coexistence and Consequences. *Canadian Psychology,* 42 (3), pp. 173-184.

BATANERO, C., GREEN, D. R. & SERRANO, L. R. (1998). Randomness, its Meaning and Educational Implications. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 29 (1), pp. 113-123.

BECONA, E. (1997). Pathological Gambling in Spanish Children and Adolescents : An Emerging Problem. *Psychological Reports,* 81, pp. 275-287.

CARON, F. (2004). Splendeurs et misères de l'enseignement des probabilités au primaire. *Actes du colloque GDM 2002.* Université du Québec à Trois-Rivières.

CHEVALIER, S. et ALLARD, D. (2001). Pour une perspective de santé publique des jeux de hasard et d'argent. *Institut national de santé publique du Québec.*

CHEVALIER, S., DEGUIRE, A.-L., GUPTA, R. et DEVERENSKY, J. L. (2003). Jeux de hasard et d'argent. *Institut de la statistique du Québec.*

COMIN, E. (2000). *Proportionnalité et fonction linéaire. Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire.* Thèse inédite, Université Bordeaux 1, Bordeaux.

DEVERENSKY, J. L. & GUPTA, R. (2004). Adolescents with Gambling Problems : A Synopsis of our Current Knowledge. *EGambling. The Electronic Journal of Gambling Issue* (10).

DEVERENSKY, J. L., GUPTA, R. & DELLA CIOPPA, G. (1996). A Developmental Perspective of Gambling Behavior in Children and Adolescents. *Journal of Gambling Studies,* 12 (1), pp. 49-65.

DICKSON, L. M., DEVERENSKY, J. L. & GUPTA, R. (2004). Harm Reductions for the Prevention of Youth Gambling Problems : Lessons Learned from Adolescent High-Risk Behavior Prevention Programs. *Journal of Adolescent Research,* 19 (2), pp. 233-263.

FELSHER, J. R., DEVERENSKY, J. L. & GUPTA, R. (2003). Parental Influences and Social Modelling of Youth Lottery Participation. *Journal of Community and Applied Social Psychology,* 13, pp. 361-377.

FELSHER, J. R., DEVERENSKY, J. L. & GUPTA, R. (2004). Lottery Playing Amongst Youth : Implications for Prevention and Social Policy. *Journal of Gambling Studies,* 20 (2), pp. 127-153.

FERLAND, F. (2002). *Évaluation d'un programme de prévention des habitudes de jeu.* Thèse inédite, Université Laval, Québec.

FERLAND, F., LADOUCEUR, R., RHÉAUME, N., BOUCHARD, C. & TREMBLAY, M. (1999). *First Step Toward a Gambling Prevention.* 1999 Annual Convention of the Canadian Psychological Association, Halifax, Nouvelle-Écosse.

FISCHBEIN, E. & SCHNARCH, D. (1997). The Evolution with Age of Probabilistic, Intuitively Based Misconceptions. *Journal of Research in Mathematics Education,* 28 (1), pp. 96-105.

FISHER, S. (1992). Measuring Pathological Gambling in Children : The Case of Fruit Machines in U. K. *Journal of Gambling Studies,* 8 (3), pp. 263-285.

FOUREZ, G., ENGLEBERT-LECOMPTE, V. et MATHY, P. (1997). *Nos savoirs sur nos savoirs : un lexique d'épistémologie pour l'enseignement*. De Boeck Université, Bruxelles.

FRANK, M. L. & SMITH, C. (1989). Illusion of Control and Gambling in Children. *Journal of Gambling Behavior,* 5 (2), pp. 127-136.

GRIFFITHS, M. D. (1995). *Adolescent Gambling*. Routledge, Londres.

GRIFFITHS, M. D. & WOOD, R. T. A. (2000). Risk Factors in Adolescence : The Case of Gambling, Videogame Playing, and the Internet. *Journal of Gambling Studies,* 16 (2/3), pp. 199-225.

GUPTA, R. & DEVERENSKY, J. L. (1996). The Relationship Between Gambling and Video-Game Playing Behavior in Children and Adolescents. *Journal of Gambling Studies,* 12 (4), pp. 375-394.

GUPTA, R. & DEVERENSKY, J. L. (1998a). Adolescent Gambling Behavior : A Prevalence Study and Examination of the Correlates Associated with Problem Gambling. *Journal of Gambling Studies,* 14 (4), pp. 319- 345.

GUPTA, R. & DEVERENSKY, J. L. (1998b). An Empirical Examination of Jacobs's General Theory of Addictions : Do Adolescent Gamblers Fit the Theory ? *Journal of Gambling Studies,* 14 (1), pp. 17-49.

HARDOON, K., DEVERENSKY, J. L. & GUPTA, R. (2003). Empirical Measures vs. Perceived Gambling Severity Among Youth ; Why Adolescent Problem Gamblers Fail to Seek Treatment ? *Addictive Behaviors,* 28, pp. 933-946.

HERMAN, J., GUPTA, R. & DEVERENSKY, J. L. (1998). Children's Cognitive Perceptions of 6/49 Lottery Tickets. *Journal of Gambling Studies,* 14 (3), pp. 227-244.

HOLTGRAVES, T. & SKEEL, J. (1992). Cognitive Biases in Playing the Lottery : Estimating the Odds and Choosing the Numbers. *Journal of Applied Social Psychology,* 22 (12), pp. 934-952.

JACOBS, D. F. (1989). Illegal and Undocumented : A Review of Teenage Gambling and the Plight of Children of Problem Gamblers in America. In *Compulsive Gambling : Theory, Research and Practice*, pp. 249-292. H. J. Shaffer, S. A. Stein, B. Gambino et T. N. Cummings, éds. Lexington Books, Toronto.

JACOBS, D. F. (2000). Juvenile Gambling in North America : An Analysis of Long Term Trends and Future Prospects. *Journal of Gambling Studies,* 16 (2/3), pp. 119-152.

LADOUCEUR, R. (1994). La psychologie des jeux de hasard et d'argent : Aspects fondamentaux et cliniques. *Loisir et société,* 17 (1), pp. 213-232.

LADOUCEUR, R. (2000). *Le jeu excessif : comprendre et vaincre le gambling*. Éditions de l'Homme, Montréal.

LADOUCEUR, R., DUBE, D. & BUJOLD, A. (1994). Gambling Among Primary School Students. *Journal of Gambling Studies,* 10 (4), pp. 363-370.

LADOUCEUR, R., FERLAND, F. & FOURNIER, P.-M. (2003). Correction of Erroneous Perceptions Regarding the Notions of Chance and Randomness in Gambling among Primary School Students. *American Journal of Health Education,* 34, pp. 272-278.

LANGER, E. J. & ROTH, J. (1975). Heads I Win, Tails it's Chance : The Illusion of Control as a Function of the Sequence of Outcomes In a Purely Chance Task. *Journal of Personality and Social Psychology,* 32 (6), pp. 951-955.

LESIEUR, H. R. & KLEIN, R. (1987). Pathological Gambling Among High School Students. *Addictive Behaviors,* 12, pp. 129-135.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DU QUÉBEC (2001). *Programme de formation de l'école québécoise au primaire*. Gouvernement du Québec, Québec.

MUKHOPADHYAY, S. & GREER, B. (2001). Modeling with Purpose: Mathematics as a Critical Tool. In *Sociocultural Research on Mathematics Education : An International Perspective*, pp. 295-311. B. Atweh, H. Forgasz et B. Nebres, éds. Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, New Jersey.

PIAGET, J. et INHELDER, B. (1951). *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*. Presses universitaires de France, Paris.

PROIMOS, J., DURANT, R. H., DWYER PIERCE, J. & GOODMAN, E. (1998). *Gambling and Other Risk Behaviors among 8th to 12th-Grade Students*. Pediatrics, 102 (2).

SHAUGHNESSY, J. M. (1992). Research in Probability and Statistics: Reflections and Directions. In *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* , pp. 465-495. Sous la dir. de D. A. Grouws. Macmillan Publishing Company, New York..

STINCHFIELD, R. & WINTERS, K. C. (1998). Gambling and Problem Gambling Among Youths. *Annals, AAPSS* (556), pp. 172-185.

TREMBLAY, G. C., HUFFMAN, L. & DRABMAN, R. S. (1998). The Effects of Modeling and Experience on Young Children's Persistence at a Gambling Game. *Journal of Gambling Studies,* 14 (2), pp. 193-214.

WINTERS, K. C., STINCHFIELD, R. & FULKERSON, J. (1993). Patterns and Characteristics of Adolescent Gambling. *Journal of Gambling Studies,* 9 (4), pp. 371-386.

WYNNE, H. J., SMITH, G. J. & JACOBS, D. F. (1996). *Adolescent Gambling and Problem Gambling in Alberta*. Edmonton: Alberta alcohol and drug abuse.

Raisonnements sous-jacents à la construction de cases rectangulaires par des paysans Siamous au Burkina Faso

KALIFA TRAORÉ

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

RÉSUMÉ. L'enseignement et l'apprentissage des mathématiques au Burkina Faso connaissent d'énormes difficultés si l'on en croit les échecs massifs des élèves dans cette discipline. Les mathématiques telles qu'approchées dans les programmes d'études du Burkina Faso sont inadaptées aux besoins de la population (Actes des états généraux de l'éducation, 1994 ; MESSRS / MEBA, 2004). Elles sont perçues comme une matière difficile, voire inaccessible (Sawadogo, 2000 ; Traoré, 2002). Pourtant, la société burkinabè est confrontée dans son quotidien à des situations de vie qui convoquent pour être traitées, des ressources mathématiques (commercialisation, vente, achat, partage de produits, constructions d'habitations, etc.).

Dans la présente communication, nous nous intéressons à la construction de cases rectangulaires par les Siamous au Burkina Faso, en nous interrogeant sur les raisonnements utilisés par les paysans analphabètes qui participent à leur construction, et qui ne connaissent a priori pas les propriétés ou caractéristiques du rectangle ou du prisme à base rectangulaire.

Dans une approche ethnographique, nous tentons de comprendre le sens que donnent les acteurs engagés dans ces pratiques à leur action en vue de mettre en évidence les connaissances mathématiques mobilisées dans la construction des cases. Comment s'y prennent-ils pour aborder cette construction ? Quels savoirs sont ici mobilisés dans l'action de manière implicite ? Il s'agira donc pour nous d'expliciter les ressources mathématiques, telles qu'elles s'utilisent au quotidien dans cette pratique. Nous avons assisté à l'implantation et à la construction d'une telle case par des paysans (qui ne connaissent ni règles graduées, ni compas, ni équerre). À l'aide d'une corde, les paysans déterminent la base de la case (en la traçant) en tenant compte de plusieurs contraintes explicites et implicites. L'analyse du processus d'apprentissage de la pratique que nous avons observée, nous amène à voir l'apprentissage des mathématiques comme une pratique sociale dans cette communauté. Nos observations nous permettent de conclure que la base de la case est effectivement rectangulaire. Nous présentons les raisonnements mathématiques sous-jacents à cette activité, qui nous conduisent à cette conclusion.

INTRODUCTION

La société burkinabè est confrontée dans son quotidien à des situations de vie — commercialisation de produits agricoles, vente, achat, partage de produits, constructions d'habitats, etc. — qui pour être traitées, nécessitent des ressources mathématiques (Traoré, 2005). Dans la présente communication, nous analysons la construction de cases rectangulaires par des paysans Siamous analphabètes au Burkina Faso, qui ne connaissent pas a priori les propriétés ou caractéristiques du rectangle ou du prisme à base rectangulaire au sens scolaire : comment s'y prennent-ils pour aborder cette construction ? Quels savoirs ont-ils mobilisés dans l'action de manière implicite ? Pour mieux comprendre l'analyse de cette pratique, nous décrivons d'abord le contexte général dans lequel celle-ci est mise en œuvre. Après avoir présenté notre objectif et la méthodologie, nous analysons l'organisation de la construction des cases. Nous explicitons ensuite les procédures utilisées et les raisonnements sous-jacents pour tracer la base rectangulaire de la case.

CONTEXTE GÉNÉRAL

L'étude se situe dans le cadre de notre recherche doctorale qui porte sur les pratiques mathématiques construites en contexte par les Siamous au Burkina Faso. Le Siamou est une des nombreuses ethnies du Burkina Faso. L'habitat traditionnel des Siamous est la case (cases rondes pour les femmes et cases rectangulaires pour les hommes).

Dans cette communauté, les travaux de construction des cases commencent en général à partir du mois de décembre (fin des pluies et début de la saison sèche) et sont considérés comme des travaux de garçons. Les femmes sont chargées d'approvisionner le chantier en eau et de faire la cuisine pour les acteurs. Nous avons compris à la suite d'un entretien avec des acteurs que les femmes s'occupaient de la chape et du décor intérieur de la case.

Case rectangulaire dans une concession

La case à construire prend place dans un enceinte appelée « concession ou cours[1]», où s'exercent certaines contraintes en terme d'espace (existence d'autres cases ou de maison, espace à prévoir pour la toiture et celle des cases voisines, espace à prévoir pour la circulation des personnes et des biens, etc.). L'implantation d'une case rectangulaire demande donc plus que de simplement savoir tracer un rectangle, puisqu'il faut tenir compte de toutes ces contraintes pour déterminer d'abord les dimensions et ensuite, tracer la base.

[1] Une *concession* ou *cours* est le lieu d'habitation d'une grande famille (famille élargie), constitué de plusieurs cases, de maisons modernes, de greniers, d'espaces réservés pour certaines coutumes, etc.

OBJECTIF ET MÉTHODOLOGIE

Il s'agit pour nous de comprendre du point de vue des acteurs, comment ceux-ci procèdent pour construire des cases dont la base semble rectangulaire alors que ces acteurs ne connaissent ni équerre, ni compas. Notre recherche porte sur des pratiques sociales en milieu naturel, au cœur de la vie quotidienne. Une posture interprétative s'impose donc à nous pour cette recherche. L'ethnographie (Woods, 1999 ; Goetz & Lecompte, 1984 ; Berthier, 1996 ; Ghasarian, 2002) nous paraît la mieux indiquée pour rendre compte de manière détaillée des ressources mathématiques, telles qu'elles s'utilisent dans la pratique quotidienne, et pour mettre en évidence le sens que leur donnent les acteurs engagés dans ces pratiques.

Nous avons observé la construction d'une case rectangulaire par des paysans. La pratique a été filmée, un entretien a posteriori a été réalisé avec deux acteurs que nous avons considéré comme étant les plus impliqués. L'entretien qui s'est déroulé après que le chercheur ait visualisé l'enregistrement de la pratique, a aussi été enregistré. Tous les enregistrements ont été traduits et transcrits. Les données sont issues de deux modes de collectes :

- observation, avec des questions d'explicitation d'action ;
- entretien d'explicitation (Vermersch, 2000) a posteriori, avec les deux acteurs les plus impliqués dans la détermination de la base rectangulaire de la case.

Les données sont recueillies en situation réelle. En d'autres termes, la construction que nous avons observée était prévue et programmée indépendamment de notre recherche.

Nous avons été accompagné pendant toute la cueillette de données sur le terrain par deux paysans qui ont pris une part active à la construction de la case. La présence à nos côtés de ces deux personnes avait pour but de vaincre des réticences éventuelles des acteurs aux enregistrements. Elle permettait ainsi de renforcer et de maintenir la confiance entre chercheur et participants à la recherche.

Nous avons choisi d'observer une construction qui se faisait dans une grande famille. Tous les garçons âgés d'au moins huit ans étaient impliqués dans la pratique. Ce choix nous permettait de voir comment s'organise la construction d'une case, en tant que pratique sociale. Il nous permettait également de comprendre le processus d'apprentissage sous-jacent à cette pratique. Avant d'analyser les ressources mathématiques mobilisées dans cette pratique, examinons d'abord l'organisation de la construction de la case telle que nous l'avons observée.

ORGANISATION DE LA CONSTRUCTION DE LA CASE

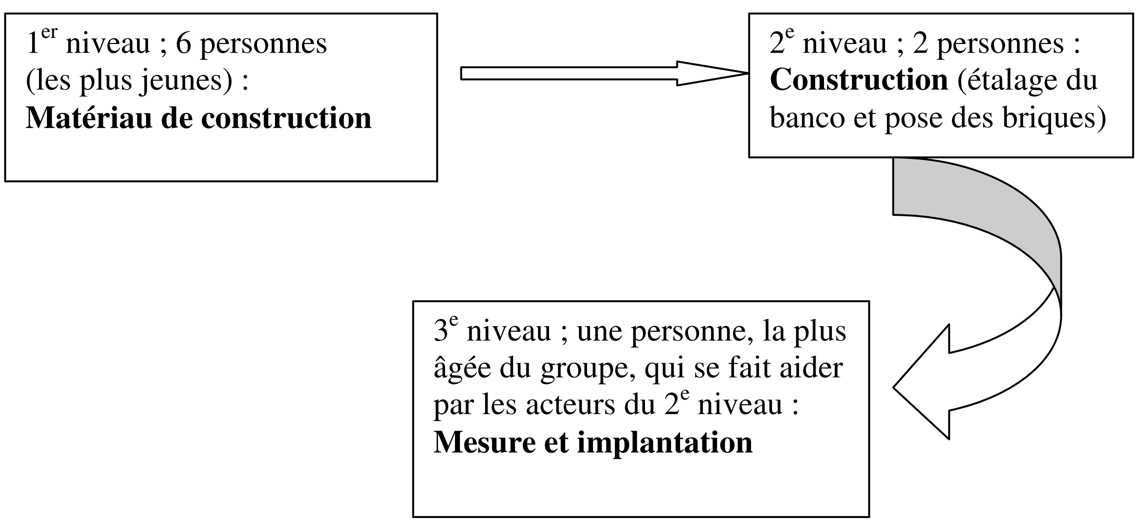
Avant le jour même de la construction, il y a tout le travail de confection et de ramassage des briques, de terrassement et accumulation de la terre (qui sera transformée en banco[2]) en amont de la pratique de construction. Tout ce travail est du ressort des plus jeunes : c'est là que commence l'apprentissage de la construction des cases.

[2] Banco est de la boue pétrie qu'on utilise comme joint (comme le ciment) à mettre entre les briques.

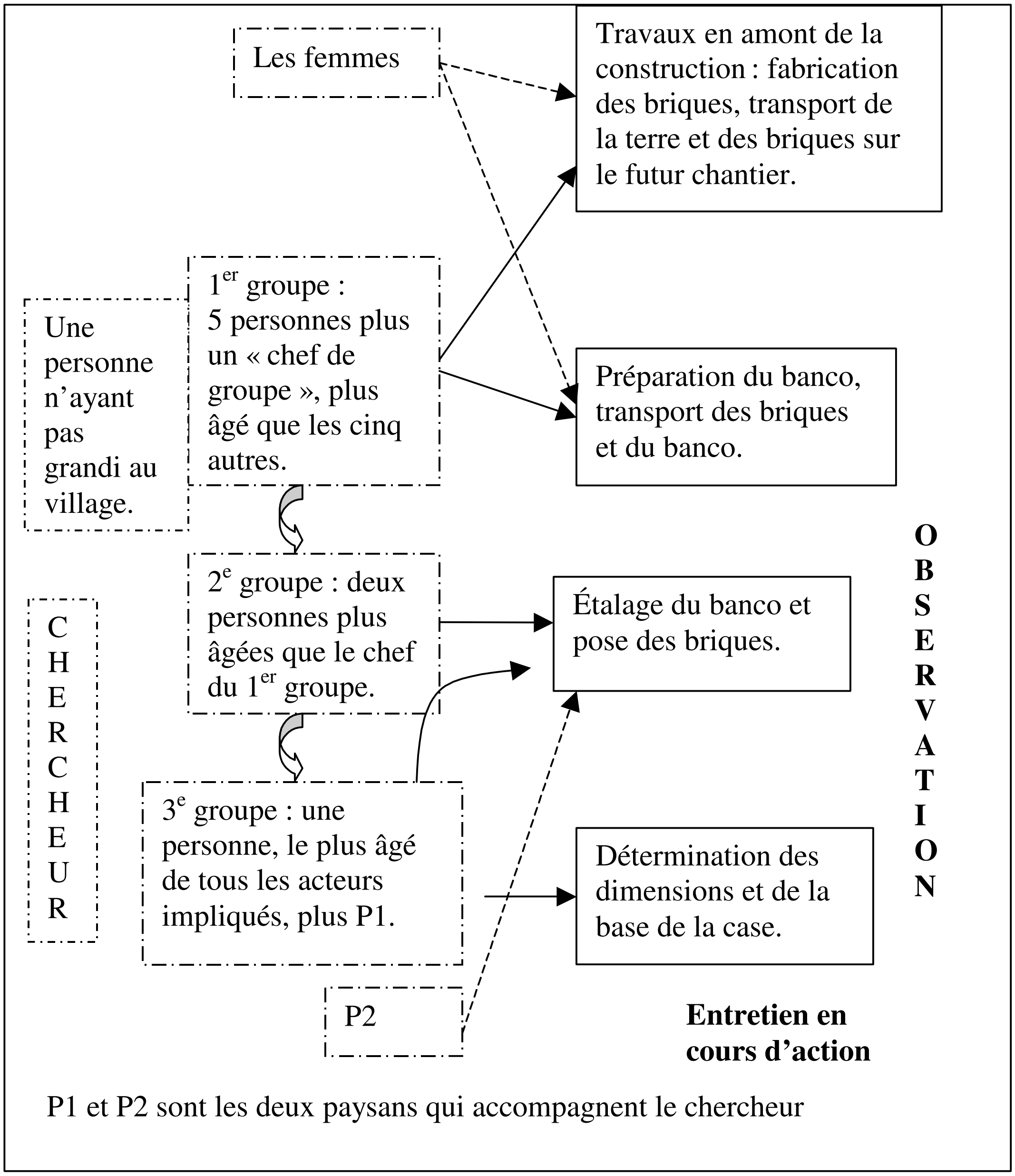
Comme il en a été le cas lors de notre observation, les acteurs impliqués dans la pratique pourraient être regroupés, le jour de la construction, de la manière suivante :

- Le groupe 1 (niveau 1), constitué de 6 personnes toutes élèves (les plus jeunes), est chargé du pétrissage et du transport des briques et du banco. Le plus âgé de ce groupe (seul élève du secondaire et le plus scolarisé des acteurs) est à cheval sur le groupe 1 dont il est le responsable et sur le groupe 2, dont il aspire à être membre.
- Le groupe 2 (niveau 2), constitué de 2 personnes toutes deux analphabètes (plus âgées que ceux du groupe 1), est chargé de l'étalage du banco sur le mur et de la pose des briques sur le mur. Un élément de ce groupe (que je croyais être le plus âgé lors de l'observation, mais les entretiens a posteriori me révéleront le contraire) a participé activement aux travaux du troisième groupe.
- Le groupe 3 (niveau 3), formé d'une personne (la plus âgée parmi ceux qui interviennent directement dans la construction), qui est le « chef de chantier ». Il a effectué les mesures pour l'implantation avec l'appui d'un des paysans qui accompagnait le chercheur et qui semblait plus expérimenté que le « chef de chantier », notamment dans la détermination de la base de la case rectangulaire.

Comme on le voit est ici en jeu, dans cette pratique, une véritable « mini-société ». Les groupes ci-dessus pourraient être vus comme des niveaux dans le processus d'apprentissage, l'apprentissage consistant à changer de niveau (participation périphérique légitime, Lave & Wenger, 1991). Le passage d'un niveau à un autre ne se fait pas de façon linéaire.



Nous nous intéressons davantage aux travaux du 3e niveau car c'est à ce niveau que la base est tracée. De plus, il correspond à la fin du processus d'apprentissage. Le fonctionnement de la mini-société impliquée dans les travaux de construction pourrait être schématisé de la manière suivante :



Schématisation du fonctionnement de la mini-société impliquée dans la construction

ANALYSE DES PROCÉDURES UTILISÉES

La case prend place dans une concession (lieu où habite une grande famille). Son implantation tient compte nécessairement de plusieurs contraintes et facteurs dont les plus importants sont : espace à prévoir pour la confection de la toiture de la case à construire en prenant en compte celles des cases voisines existantes, espace pour la circulation des personnes et des biens. Les dimensions de la case sont donc déterminées en lien avec ces éléments et bien sûr, avec ce qui est à prévoir pour l'utilisation future de la case. Dans le cas de la case rectangulaire, on sait qu'il s'agit d'une chambre à coucher. C'est certainement à cause de tous ces facteurs que, dans l'organisation du travail, l'implantation de la case (détermination des dimensions, tracée de la base, pose des premières briques) est assurée par les acteurs les plus expérimentés.

La détermination des dimensions

Des observations et des entretiens, il ressort que les dimensions sont déterminées d'abord de façon provisoire, s'il y a lieu en comparaison avec celles d'une case existante (en prenant les dimensions de la case existante avec une corde ; selon qu'on veut une case plus grande ou plus petite, on augmentera ou diminuera les dimensions sur la corde). Avant de décider si l'on veut une case plus grande ou plus petite, la question de l'espace disponible doit être déjà résolue par les acteurs du niveau 3. Il est évident par exemple que si l'espace disponible est insuffisant pour construire une case de mêmes dimensions que celle existante, ils n'envisageront jamais de construire à cet endroit une case plus grande. Dans ce milieu, lorsqu'on parle d'espace pour construire, il s'agit d'un espace qui tient compte de toutes les contraintes énumérées précédemment. Voici un extrait des verbatims de l'entretien a posteriori.

Chercheur. *Quand même j'ai vu comment vous avez mesuré la case, est-ce que vous pouvez me dire les différentes étapes que vous suivez. J'ai regardé le film. J'ai ma petite idée. C'est pour que chacun se rappelle un peu.*

Acteur 1. *Petit frère voici la parole. Pour la case rectangulaire, c'est toujours plus facile de déterminer les dimensions à partir de celles d'une case existante. On mesure la longueur de la case existante avec une corde. Si on veut une case plus grande, on augmente la longueur, si on veut une plus petite, on diminue. Si on a la longueur voulue, on la reporte sur l'endroit où on veut construire la case, en marquant sur le sol les extrémités. À partir d'un de ces points, on reporte une largeur (en diminuant la longueur) si on veut une case rectangulaire ou la longueur si on veut une case « carrée ».*

Chercheur. *Je crois avoir compris cette partie. L'autre jour quand vous avez marqué les 4 coins de la case, vous avez dit que la case serait trop grande.*

Acteur 1. *Oui.*

Chercheur. *Vous l'avez diminuée.*

Acteur 1. *Oui.*

La principale raison avancée pour faire cette diminution des dimensions de la case est l'insuffisance de l'espace restant pour la toiture. En effet, les toits se confectionnent à même le sol et sont transportés ensuite sur la case concernée. Ce qui oblige à disposer d'un espace suffisant (plus grand que l'aire de la base) dans le voisinage immédiat de la case. Supposons les dimensions déterminées (la longueur et la largeur sont marquées sur une corde) tenant compte de toutes les contraintes. On pourra alors passer à l'étape suivante qui est le tracé de la base.

L'implantation de la case (tracé de la base rectangulaire)

Nos observations et entretiens avec les acteurs nous permettent de comprendre les démarches suivies par les acteurs pour tracer les limites extérieures de la future case. Le positionnement de la case, après la détermination de ses dimensions, tient compte d'autres éléments comme le passage pour les femmes qui vont chercher de l'eau, l'espace pour la confection de la toiture, l'espace occupé par les toitures des cases voisines, etc.

Dans l'extrait des verbatims de l'entretien a posteriori précédent, l'acteur 1 nous indiquait déjà comment il obtenait les trois coins (provisoires) de la case. L'extrait suivant montre la suite des démarches suivies pour tracer la base de la case.

Acteur 1. *Dans un premier temps, les coins qu'on détermine sont provisoires. C'est pour ça qu'on met seulement une marque sur le sol ou bien on enfonce légèrement les clous, pour pouvoir les déplacer après. On essaie de déterminer ensuite le 4^{e} coin de telle sorte que les « côtés opposés » soient égaux. C'est à ce niveau que j'ai surtout besoin de l'appui des autres. Ça c'est difficile à faire seul. Après ça, c'est la détermination des coins définitifs. Là on mesure les diagonales. Elles doivent avoir la même longueur. Si ce n'est pas le cas, on joue sur les coins pour que ça soit ainsi.*

Chercheur. *Mais en ce temps, est-ce que les côtés opposés auront toujours la même longueur ?*

Acteur 1. *En principe oui, avec des gens qui connaissent le travail. De toutes façons, on vérifie toujours une deuxième fois avant de fixer définitivement les coins. Là bas, on prend tout le temps parce s'il y a une erreur dans les mesures, tout le travail que vous aurez fait est inutile. Vous allez casser forcément la case.*

Chercheur. *Pourquoi vous mesurer les diagonales ?*

Acteur 2. *C'est pour que la case ne soit pas « aplatie ». Il faut que les 4 coins aient la même largeur.*

Chercheur. (Il dessine un parallélogramme non rectangle et montre un des angles obtus) *Si c'est comme ça, est-ce que la case est aplatie ? Tu vois que ce coin est large, là.*

Acteur 2. *Mais oui. Dans le sens que moi je dis, en tout cas, c'est aplati. Les 4 coins doivent être pareils. C'est pour cela qu'il faut que les diagonales aient la même longueur.*

Acteur 1. *Attends voir ce tu as fait là. Tu vois ce coin est large, forcément lui là est aussi large et les deux autres seront petits. Les coins opposés vont toujours ensembles. Même quand on pose les briques, on tient compte de ça.*

Cet extrait nous montre comment ces paysans tracent la base. Ils justifient leur démarche. Pour ne pas avoir une case « aplatie », les diagonales doivent avoir la même longueur. Les paysans sont conscients que les diagonales jouent le rôle le plus important dans la réussite de la construction d'une case rectangulaire. Ils font bien sûr le lien entre « les diagonales ont même longueur » et « les coins ont la même largeur » (les 4 angles sont égaux).

Mesures des diagonales (sur l'image, on voit la corde qui fait le tour des quatre coins).

Nos observations montrent que les limites extérieures de la case sont matérialisées par une corde, qui accompagnera la construction jusqu'à la fin ; ce qui permet de conserver les dimensions d'une couche de briques à une autre.

Reprenons avec le vocabulaire des mathématiques formelles ce que nous avons observé et les informations fournies par les acteurs. Les démarches suivies pour tracer la base rectangulaire, connaissant la longueur L et la largeur l (nous faisons abstraction de toutes les contraintes signalées précédemment, nous idéalisons en quelque sorte le problème) pourraient se synthétiser de la façon suivante.

Deux points A et B sont placés de sorte que $AB = L$, un 3^{e} point C (non aligné avec A et B) est placé à une distance l de B (les acteurs appellent aussi bien les angles que les sommets de la base les « coins » de la case). Un 4^{e} point D est trouvé après plusieurs essais, où l'on cherche à avoir $CD = L$ et $AD = l$. Autrement dit, étant donné trois points A, B et C placés dans les conditions ci-dessus, la première étape consiste à trouver un point D tel que le quadrilatère $ABCD$ ait les côtés opposés égaux ($ABCD$ est donc un parallélogramme). Une corde fait le tour du quadrilatère ainsi obtenu et chaque coin est représenté sur cette corde. Le repérage des coins sur la corde assure l'égalité des côtés opposés lors du déplacement d'un point.

Les diagonales sont ensuite mesurées et doivent avoir la même longueur, en déplaçant au besoin les points C et D pour que les angles soient égaux. *Les 4 coins doivent être pareils. C'est pour ça qu'il faut que les diagonales aient la même longueur,* d'après l'acteur 2. On peut remarquer que les acteurs parlent d'angles égaux (de « coins » égaux), et non d'angles droits.

La pose des briques

Nos observations nous permettent de penser qu'une certaine forme de symétrie des « coins opposés » et des côtés opposés guide les paysans tout au long de la construction. C'est ce qui est exprimé par l'acteur 1 : *Les coins opposés vont toujours ensembles. Même quand on pose les briques, on tient compte de ça.*

Disposition des premières briques après le tracé de la base

L'affirmation « les coins opposés vont toujours ensemble » est vraie pour n'importe quel quadrilatère dont les côtés opposés sont égaux, selon les acteurs. Ce qui correspond à l'égalité des angles opposés dans un parallélogramme.

Pour les paysans les *coins* ont une importance capitale dans la réussite de la construction.

Acteur 2. *À ce niveau, on a la dimension extérieure de la case. Et on garde cette corde jusqu'à la fin de la construction. Comme ça on est sûr que les côtés opposés sont égaux d'une couche à l'autre. Nous, on est aussi sûr que la case ne sera pas aplatie. Mais pour quelqu'un qui doute, il peut aussi s'assurer que les diagonales sont égales. Dans la construction on commence toujours avec les briques des coins. On fait ensuite monter la corde. S'il y a des choses à redresser on les redresse avant de commencer à placer les autres briques.*

Chercheur. *Qu'est-ce que tu veux dire par des choses à redresser ?*

Acteur 2. *Il faut que les briques des coins soient bien posées pour que la case soit bien construite. Si il y a des erreurs de construction, ça vient toujours des coins.*

Chercheur. *Ah bon ! C'est si important que ça ?*

Acteur 2. *Si quelqu'un sait placer les briques du coin, il sait construire. C'est pour ça que lorsque quelqu'un quitte le groupe des enfants et commence la construction, quand il place les briques d'un coin, il va demander à un aîné de venir voir avant de continuer.*

Chercheur. *On commence toujours par les briques des coins ?*

Acteur 2. *Oui. Et ça c'est sans la corde. C'est quand on a fini de bien placer les briques des coins qu'on fait remonter la corde au niveau de cette couche. Et les autres briques seront placées tout au long de la corde. La corde doit toucher toutes les briques.*

Tout au long de la construction les acteurs disposent de moyens de contrôle pour s'assurer d'un maintien de la forme rectangulaire (vérifier que les diagonales ont toujours la même longueur) et des dimensions de la case (maintenir la corde sur laquelle la position de chaque coin est marquée). D'après tout ce qui précède, nous pouvons affirmer que la base des cases est effectivement rectangulaire, puisqu'elle forme un quadrilatère qui a ses côtés opposés égaux et ses diagonales égales.

CONCLUSION

La participation de tous les garçons de la famille nous indique que l'apprentissage de la construction des cases fait partie de la formation du citoyen dans cette communauté. C'est une pratique que tout « ancien » est sensé connaître. La construction des cases rectangulaires mobilise des connaissances mathématiques. Son organisation fait référence à une certaine organisation sociale de la communauté Siamou, où les mathématiques sont apprises par le passage d'une participation périphérique légitime à une participation de plus en plus centrale.

Les connaissances mathématiques mobilisées dans la construction de cases rectangulaires par les Siamous ne sont pas si éloignées de celles enseignées à l'école. Elles sont beaucoup plus complexes, compte tenu des différents éléments du terrain. Voici ce qu'en pense le responsable du premier groupe (niveau 1) : « Ce n'est pas pareil à l'école. Ce sont les grands frères qui savent par exemple que la case est trop grande ou trop petite ». Rappelons que tous les membres du niveau 1 étaient des élèves et leur responsable était en quatrième (3^{e} secondaire).

Nous soutenons que la prise en compte à l'école des raisonnements mathématiques, tels qu'ils sont mis en œuvre dans les pratiques sociales, contribuerait à mettre en évidence l'apport des mathématiques dans la formation à la citoyenneté. Le développement de la recherche sur les mathématiques de la vie quotidienne (D'Ambrosio, 1997 ; Gerdes, 1999) nous paraît une piste intéressante dans ce sens.

BIBLIOGRAPHIE

BERTHIER, P. (1996). *L'Ethnographie de l'École, Éloge critique*. Anthropos, Paris.

D'AMBROSIO, U. (1997). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. In *Ethnomathematics: challenging eurocentrism in mathematics education*, pp. 13-24. Sous la dir. de A. B. Powell et M. Frankenstein. State University of New York Press, Albany, État de New York.

GHASARIAN, C. (2002). *De l'ethnographie à l'anthropologie réflexive, Nouveaux terrains, nouvelles pratiques, nouveaux enjeux.* Armand Colin, Paris.

GERDES, P. (1999). *Geometry from Africa : mathematical and educational experiences.* Mathematical Association of America, Washington.

GOETZ, J. P. & LECOMPTE, M. D. (1984). *Ethnography and qualitative design in Educational research*. Academic Press Inc, San Diego, Californie.

LAVE, J. & WENGER, E. (1991). *Situated learning : legitimate peripheral participation.* Cambridge University Press, Cambridge.

MESSRS et MEBA du Burkina Faso (2004). *Rapport national sur le développement de l'éducation au Burkina Faso, juin 2004.* Ministère des enseignements secondaire, supérieur et de la recherche scientifique et Ministère de l'éducation de base et de l'alphabétisation, Ouagadougou.

PM du Burkina Faso (1994). *Actes des états généraux de l'éducation*. Premier ministère, Ouagadougou.

TRAORÉ, K. (2002). *Échec en Mathématiques au Burkina Faso : Réflexion sur quelques causes en classe de seconde C*. Mémoire inédit de fin de formation d'inspecteur de l'enseignement secondaire (option : Mathématiques), École Normale Supérieure de Koudougou.

TRAORÉ, K. (2005). Connaissances et raisonnements mathématiques développés en contexte : un exemple à propos du comptage des mangues. *Actes du colloque Espace Mathématiques Francophones 2003.* Tozeur, Tunisie.

SAWADOGO, B. (2000). *Attitudes négatives envers les mathématiques des élèves du secondaire, cas de la région du centre-ouest du Burkina Faso*. Mémoire inédit de fin de formation d'inspecteur de l'enseignement secondaire (option : Mathématiques), École Normale Supérieure de Koudougou.

VERMERSCH, P. (2000). *L'entretien d'explicitation.* ESF, Issy-les-Moulineaux, France.

WOODS, P. (1999). Ethnographie au service de l'éducation. In *Recherches ethnographiques en Europe et en Amérique du Nord*, pp. 43-72. A. Vasquez et I. Martinez, éds. Anthropos, Paris.

krinkalifa@hotmail.com

Développement du raisonnement proportionnel : potentiel des élèves avant tout enseignement de la proportionnalité

IZABELLA OLIVEIRA

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

RÉSUMÉ. Notre étude cherche à rendre compte des stratégies utilisées par les élèves pour résoudre des problèmes de proportion simple, et ce avant tout enseignement. Plus précisément, nous cherchons à cerner quel est le type de raisonnement déployé par les élèves pour résoudre des problèmes qui favorisent à la fois un raisonnement qualitatif et quantitatif. Nous voulons aussi voir si les élèves sont en mesure de reconnaître des situations non proportionnelles. Une expérimentation a été conduite en ce sens auprès d'un groupe d'élèves de Secondaire 2 (13-14 ans) provenant d'une école de Montréal. L'analyse fait ressortir une variété de stratégies de résolution mises en œuvre par les élèves. Les résultats montrent le potentiel et la diversité des stratégies qu'utilisent les élèves avant l'enseignement.

1. INTRODUCTION

1.1. Importance de la proportionnalité dans la vie quotidienne, en mathématiques et dans les autres disciplines

L'importance que la proportionnalité prend en dehors de l'école (dans la vie de tous les jours, en sciences, en économie, en sciences de la santé, en sciences humaines) est mentionnée par plusieurs auteurs depuis quelques années : Nunes, Schliemann & Carraher, 1993 ; Soto et Rouche, 1994 ; Sokona, 1989. Les situations suivantes illustrent différents contextes où le raisonnement proportionnel est mobilisé.

a. Avec une vitesse constante, une voiture fait un parcours de 500 km en 10 heures. Combien de kilomètres parcourra-t-elle en 30 heures ?
b. En roulant à 60 km à l'heure, une voiture met 6 heures pour parcourir une certaine distance. Si elle avait pu rouler à une vitesse de 100 km à l'heure, combien aurait-elle mis de temps ?
c. On attend 6 personnes pour dîner. La recette utilisée pour faire le potage prévoit les quantités pour 4 personnes. Quelles quantités de chacun des ingrédients devra-t-on mettre pour préparer le potage pour 6 personnes ?
d. Avec 4 tuiles, je peux couvrir 2 pieds carrés. Combien de tuiles devrai-je commander pour couvrir le plancher de ma cuisine, de 15 pieds carrés ?

Ces contextes et bien d'autres font référence à des situations qui peuvent être rencontrées dans la vie de tous les jours et qui font appel à un raisonnement proportionnel.

Dans les mathématiques scolaires, le raisonnement proportionnel sera mis en œuvre dans le travail sur les pourcentages (par exemple lorsqu'un certain pourcentage du tout est connu et qu'il faut retrouver ce que valait le tout) ; dans le travail sur le calcul d'aires (à propos, par exemple, de l'aire de secteurs circulaires) ou de volumes ; en géométrie, dans le travail sur les figures semblables ; en probabilité ; en algèbre (dans certains types de problèmes, faisant intervenir des taux) ; en statistiques ; dans certaines représentations graphiques qui permettront d'illustrer les résultats, etc.

On peut également évaluer l'importance que prend la proportionnalité dans d'autres domaines. C'est le cas, par exemple, du domaine médical, où certaines prescriptions et analyses faites en laboratoire nécessitent le recours à un raisonnement proportionnel. En ce sens, plusieurs auteurs s'entendent pour dire que le concept de proportionnalité occupe une place très importante non seulement à l'école, mais aussi dans les situations quotidiennes et dans d'autres disciplines que les mathématiques (Levain et Vergnaud, 1995 ; Nunes et al., 1993 ; Sokona, 1989 ; Levain, 1987 ; Pezard, 1985).

> *La proportionnalité est sans doute l'une des notions mathématiques les plus importantes que nous rencontrions du primaire au collège. Ses nombreuses applications dans différents domaines (mathématique, physique, biologie, chimie, économie…) lui font jouer un rôle essentiel dans l'enseignement. Il faut souligner, aussi, son utilisation dans la vie courante* (Sokona, 1989, p. 5).

Cette place importante attribuable à la proportionnalité en fait un des enjeux importants de l'éducation mathématique. Comme nous le verrons dans ce qui suit, à travers une analyse plus fine de l'ancien programme d'études du Ministère de l'Éducation du Québec (MEQ, 1994) et de celui maintenant en vigueur (2003), le rôle fondamental que joue la proportionnalité à l'école secondaire dans l'éducation mathématique est confirmé. Par ailleurs, cette analyse précise le champ des possibles auxquels devraient être confrontés les élèves.

1.2. Importance de la proportionnalité dans le programme d'études du secondaire au Québec

Le développement du concept de proportionnalité constituait un des enjeux importants de l'ancien programme d'études du secondaire (MEQ, 1994). Celui-ci mettait en effet l'accent sur l'importance de l'appropriation de ce concept, dont l'introduction se situait en 2^e^ secondaire, et se poursuivait pendant les autres années du secondaire (3^e^ et 4^e^ secondaires) :

> *La proportionnalité constitue un thème fondamental en mathématiques et plusieurs aspects de la réalité obéissent aux règles de la proportionnalité. Le raisonnement proportionnel se révèle donc une habileté intellectuelle fort utile* (MEQ, 1994, p. 28).

Dans cet extrait, nous pouvons voir que le programme d'étude prend en considération différents aspects pour justifier l'importance de la proportionnalité : d'abord, il met en évidence qu'il s'agit d'un thème fondamental en mathématiques et donc, qu'il va être au cœur de l'apprentissage d'autres concepts (tels la similitude, les probabilités, le pourcentage...). Un autre aspect mis en évidence est celui du rapport avec la réalité, plusieurs situations de la vie quotidienne obéissant aux règles de la proportionnalité ; c'est le cas par exemple de certaines situations de vente, de calcul de pourcentages, d'achats liés à des calculs de surfaces, etc.

Quand on analyse de manière plus précise le programme de 2^e^ secondaire, moment clé de l'introduction de la proportionnalité à l'école québécoise, on constate qu'un des objectifs généraux est de « Favoriser chez l'élève le développement du raisonnement proportionnel » (op. cit., p. 28). L'accent est donc mis *a priori*, dans cette introduction, sur le développement du raisonnement, comme le confirme l'extrait suivant : « Il s'agit d'amener l'élève à saisir les caractéristiques particulières d'une situation de proportionnalité et à traiter cette situation d'une manière consciente et intelligente » (op. cit., p. 28). On s'éloigne ici de l'apprentissage d'algorithmes, comme celui du produit croisé qu'on retrouvait dans le programme précédent (MEQ, 1980).

> *Le développement du raisonnement proportionnel doit se faire à partir d'activités concrètes, de questionnement, de discussions, d'exemples et de contre-exemples.* […] *Si l'on met trop tôt l'accent sur l'apprentissage d'algorithmes, on risque d'empêcher l'élève d'assimiler et d'appliquer correctement les concepts* (MEQ, 1994, p. 28).

Le programme propose des situations–problème comme moyen de développer ce raisonnement proportionnel. Cette aptitude à raisonner va demander à l'élève de pouvoir exprimer sa démarche et ce, autant oralement qu'à l'écrit. Tout au long de la 2e secondaire, le programme offre plusieurs occasions de réinvestir les connaissances qui ont été acquises sur la proportionnalité. Nous les retrouvons dans l'étude des concepts de pourcentage, de probabilité, d'homothétie, d'aire (par exemple dans le travail sur l'effet d'un changement des dimensions linéaires sur l'aire).

Les programmes des niveaux suivants (3e et 4e secondaires) font référence quant à eux à l'apprentissage des concepts de rapport et de proportion dans l'exploration des situations de variation directe et inverse. Les élèves devront s'appuyer sur ces connaissances dans la modélisation et l'analyse de situations fonctionnelles particulières.

Quelle est maintenant la place du concept de proportion dans l'actuel programme d'études du secondaire au Québec (MEQ, 2003) ? Le nouveau programme se situe-t-il dans la même perspective que le programme de 1994 ? Reprend-il les mêmes orientations ? Introduit-il de nouvelles balises ? Dans le nouveau programme d'études, l'importance du raisonnement proportionnel est de nouveau soulignée : « Le développement du raisonnement de type proportionnel est fondamental et ses applications sont nombreuses tant à l'intérieur qu'à l'extérieur de la discipline » (MEQ, 2003, p. 29).

Nous pouvons constater ici que le concept de proportion occupe encore une place très importante, comme concept-clé qui aidera les élèves dans la construction de notions mathématiques, ou en lien avec les autres disciplines. Plusieurs domaines ont d'ailleurs recours au concept de proportionnalité, nous mentionne le programme. Notons, entre autres, l'univers social, les arts, les sciences (comme par exemple la physique ou la chimie) et les technologies (MEQ, 2003). Cette utilisation, dans d'autres domaines, montre le caractère multidisciplinaire que le concept de proportion occupe dans le nouveau programme du secondaire (on perçoit son utilisation / développement possible en lien avec les autres disciplines).

Or, même si plusieurs auteurs (Sokona, 1989 ; Vergnaud, 1991 ; Levain et Vergnaud, 1995 ; Oliveira, 2000), en plus des programmes d'études québécois du secondaire ancien et actuel (MEQ, 1994, 2003), reconnaissent l'importance du raisonnement proportionnel en mathématiques et dans d'autres domaines, et même si l'on voit se dessiner, à travers ce qui précède, les orientations que pourrait prendre l'enseignement de la proportionnalité au secondaire[1], qu'en est-il vraiment de ces orientations dans l'enseignement de la proportionnalité, en lien avec les apprentissages des élèves ?

L'acquisition du concept de proportion chez les élèves a été étudiée par plusieurs recherches (Oliveira, 2000, 2001 ; Levain, 1993 ; Noelting, 1978 ; Karplus et al., 1974). Celles-ci ont permis de mettre en évidence les raisonnements développés par les élèves dans des situations proportionnelles (Oliveira, 2000, 2001 ; Levain, 1987 ; Dupuis et al., 1981 ; Karplus et al., 1974 ; Noelting, 1978) ainsi que les erreurs, difficultés qu'ils rencontrent. Elles ont permis d'autre part d'éclairer la complexité des problèmes proportionnels et d'identifier les variables susceptibles d'exercer une influence (Vergnaud, 1991 ; René de Cotret, 1991). Elles ont mis en évidence des situations d'enseignement propres à contribuer au développement de tels raisonnements (Gnass, 2000 ; Vergnaud, 1991 ; Brousseau, 1981).

Mais que sait-on véritablement des raisonnements spontanés développés par les élèves avant tout enseignement ? Sur quelles connaissances antérieures pourrait s'articuler une introduction de la proportionnalité au secondaire, en classe régulière ? Notre recherche s'est intéressée à cette question dans le contexte de l'enseignement québécois.

2. OBJECTIFS DE LA PRÉSENTE ÉTUDE

Rendre compte du potentiel de stratégies utilisées par les élèves du secondaire dans des problèmes mettant en jeu un raisonnement proportionnel, et cela avant tout enseignement de la proportionnalité. Cerner l'influence du type de problème proposé aux élèves en regard des stratégies développées.

3. MÉTHODOLOGIE

Avec l'objectif de cerner le potentiel de stratégies mobilisées par les élèves, un test écrit a été soumis à 33 élèves de 2^{e} secondaire, avant tout enseignement de la proportionnalité.

Nous reprenons ci-dessous le cadre de référence sous-jacent à l'élaboration du test : chaque élève a répondu individuellement à dix problèmes simples[2], huit problèmes portant sur la résolution de situations proportionnelles et deux problèmes mettant en jeu la reconnaissance par l'élève de situations non proportionnelles. Les problèmes portant sur les situations proportionnelles sont constitués, d'une part, de problèmes qui sollicitent davantage un raisonnement quantitatif et d'autre part, de problèmes qui sollicitent un raisonnement qualitatif.

3.1. Problèmes qui sollicitent davantage un raisonnement quantitatif

Dans cette catégorie, on retrouve des problèmes mettant en jeu une *proportion directe* (quatre problèmes). Ces problèmes avaient comme objectif d'observer quelles stratégies les élèves mobilisent quand le lien multiplicatif entre deux grandeurs homogènes n'est pas

[1] Le nouveau programme, dans ce cas, est trop récent pour pouvoir tirer des conclusions.

[2] Nous avons retenu pour ce test des problèmes dont l'énoncé, simple, permettait un engagement de l'élève dans la résolution. En ce sens, ces problèmes se rapprochent des énoncés usuels auxquels les élèves sont confrontés.

immédiat ; dans le cas où le rapport entre les nombres considérés n'est pas un nombre entier, ou encore stratégies mises en place dans une situation de proportionnalité plus complexe faisant intervenir le concept de vitesse.

Exemple. Dans un banquet où l'on propose une dégustation de moules, on considère qu'il faut 72 moules pour 6 personnes. Combien faut-il acheter de moules pour 17 personnes ?

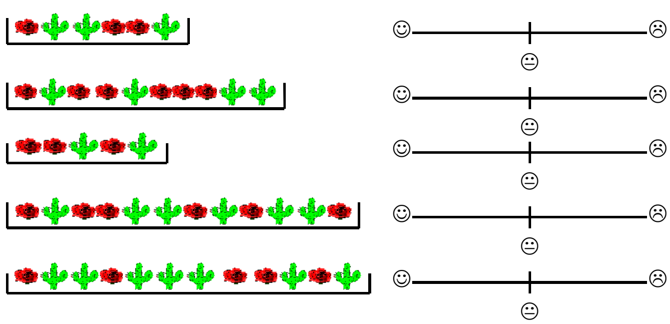
Exemple. Une voiture parcourt une distance entre deux villes en 5 heures, avec une vitesse constante de 90 kilomètres par heure. En combien de temps fera-t-elle le même voyage avec une vitesse de 75 kilomètres par heure ?

On retrouve également des problèmes mettant en jeu une *proportion inverse* (deux problèmes). Ces problèmes avaient comme objectif d'observer quelles sont les stratégies utilisées par les élèves pour résoudre un problème de proportion inverse, avant tout enseignement de la proportionnalité. Les problèmes de la catégorie prenaient en compte les variables didactiques suivantes : structure du problème (proportion directe et inverse), le nombre de couples de données (2 couples et 3 couples), rapport entre les données (entier et non entier), grandeurs (homogènes et hétérogènes) et présence ou non d'un support visuel.

3.2. Problèmes qui sollicitent davantage un raisonnement qualitatif

Les deux problèmes de cette catégorie avaient comme objectif d'observer quelles stratégies les élèves mettent en place pour résoudre un problème qui sollicite un raisonnement qualitatif. Il s'agissait aussi de voir comment les élèves perçoivent l'influence de chacune des grandeurs dans la comparaison. Ces problèmes prenaient en compte les variables didactiques suivantes : présence d'un support visuel ; question basée sur une comparaison qualitative par sa nature.

Exemple. Un petit insecte aveugle dort dans des boîtes qui contiennent des fleurs et des cactus. Le petit insecte n'aime pas les cactus. Comme il est aveugle, il ne sait pas dans quelle boîte il va tomber. Peux-tu indiquer sur les règles comment se sentira le petit insecte s'il tombe dans chacune de ces boîtes ? (Cuello, 1994).



3.3. Reconnaissance de situations non proportionnelles

Les deux problèmes de cette catégorie avaient comme objectif d'évaluer dans quelle mesure les élèves identifient qu'une situation est proportionnelle ou non. Ces problèmes prenaient en compte la variable didactique suivante : le nombre de couples (2 couples versus 3 couples).

Exemple. La taille d'Ophélie était de 83 cm à 2 ans et de 1,66 m à 16 ans. Peux-tu dire quelle est la taille d'Ophélie aujourd'hui, si on sait qu'elle vient d'avoir 32 ans ? Et quelle était sa taille à 1 an, 4 ans, 8 ans ? (Dumas et Jaquet, 2001).

4. ANALYSE DES PRODUCTIONS D'ÉLÈVES[3]

Nous présenterons d'abord les stratégies utilisées par les élèves et les difficultés qu'ils rencontrent dans la résolution des différents problèmes[4].

4.1. Analyse pour les problèmes qui sollicitent un raisonnement quantitatif

4.1.1. Stratégies développées par les élèves dans les problèmes de proportion directe

Pour illustrer les stratégies des élèves et l'influence de certaines variables didactiques dans ce groupe de problèmes, nous avons choisi comme premier exemple le problème de la « Recette Kiwi spécial ». Dans celui-ci, l'élève doit refaire la recette en tenant compte du nombre de portions et de la quantité d'ingrédients.

> *Recette* Kiwi spécial
> *30 ml, liqueur « Kiwi »*
> *15 ml, Amaretto (Monalisa)*
> *30 ml, Vodka (Moskova)*
> *60 ml, Jus d'ananas*
> *Bien brasser le tout, et verser sur de la glace pilée dans une grande coupe à champagne. Décorer d'une tranche de kiwi et d'une cerise. Donne environ 4 portions.*

a) *Refaire cette recette pour 8 personnes.*
b) *Refaire cette recette pour 6 personnes.*
c) *Quelle serait la recette de* Kiwi Spécial *avec 40ml de liqueur de Kiwi, pour que ça goûte la même chose ?*

Pour la question a), la procédure la plus utilisée (25 élèves sur 33 ont eu recours à cette procédure) a été **la procédure scalaire** (recours à un facteur scalaire) : pour 8 personnes, ça prendra 2 fois plus de chacun des ingrédients.

$30 \times 2 = 60$	60 ml de liqueur « kiwi »
$15 \times 3 = 30$	30 ml d'Amaretto
$30 \times 2 = 60$	60 ml de Vodka
$60 \times 2 = 120$	120 ml de jus d'ananas

On a observé que lorsque le nombre change (recette pour 6 personnes au lieu de 8), les stratégies employées par les élèves changent, confirmant l'influence de la variable didactique « nombre » sur le choix de la procédure employée. Ainsi, pour la question b), la procédure la plus utilisée ($n = 16$) a été la procédure **linéaire** (les quantités pour 4 personnes plus les quantités pour 2 personnes (la moitié des quantités pour la 1re recette)).

---

[3] Les exemples donnés sont extraits des protocoles des élèves.
[4] Comme les stratégies reviennent d'un problème à l'autre, nous ne présenterons l'analyse que de quelques problèmes dans chacune des catégories.

$30 \div 2 = 15$	$15 + 30 = 45$ ml de liqueur de kiwi
$15 \div 2 = 7{,}5$	$7{,}5 + 15 = 22{,}5$ ml d'Amaretto
$30 \div 2 = 15$	$15 + 30 = 45$ ml de vodka
$60 \div 2 = 30$	$30 + 60 = 90$ ml de jus d'ananas

Cette influence de la variable nombre s'est confirmée dans la question c) (recette avec 40 ml de liqueur de kiwi, au lieu de 30 ml). Nous avons vu alors apparaître la procédure additive erronée chez les élèves (ajout de +10 à la quantité initiale). Nous n'avions pas observé cette erreur auparavant. Les exemples ci-dessous permettent de comprendre la différence entre une procédure **linéaire** qui présente aussi +10 pour la première quantité, mais où le rapport de 1/3 de la quantité initiale est maintenu tout au long de la résolution et, une procédure **additive erronée**, où le +10 représente un ajout constant ; ici, le rapport de 1/3 n'est pas pris en compte par l'élève.

Procédures…

… **linéaire** ($n = 4$)	… **additive erronée** ($n = 9$)
$30 \div 3 = 10 + 30 = 40$ ml, Kiwi	$30 + 10 = 40$ ml, Kiwi
$15 \div 3 = 5 + 15 = 20$ ml, Amaretto	$15 + 10 = 25$ ml, Amaretto
$30 \div 3 = 10 + 30 = 40$ ml, Vodka	$30 + 10 = 40$ ml, Vodka
$60 \div 3 = 20 + 60 = 80$ ml, Jus d'ananas	$60 + 10 = 70$ ml, Jus d'ananas

Le problème suivant « *Une voiture roule toujours à la même vitesse. Elle fait 24 km en 12 minutes, ou encore 36 km en 18 minutes. À ce rythme, la voiture aura parcouru 40 km en combien de minutes ?* » a aussi provoqué des changements dans les stratégies utilisées par les élèves. Nous voyons ici l'influence à la fois de l'introduction de la variable didactique « 3 couples » et des nombres choisis (la relation entre les grandeurs de même nature n'est pas évidente, celle entre les grandeurs de natures différentes l'est davantage), qui semblent provoquer un changement de stratégie.

Pour ce problème, la procédure **fonctionnelle** a été la plus utilisée ($n = 20$) :
$12 = 1/2$ de 24 $\qquad 40 \div 2 = 20$
Le nombre de km est toujours le double de celui du nombre de minutes

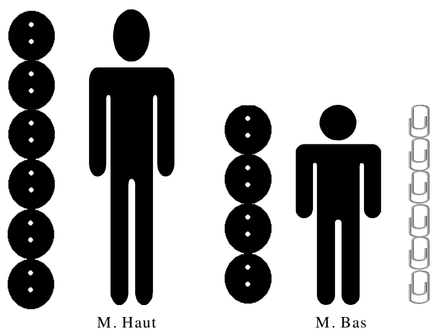
Il y a aussi eu des élèves qui ont utilisé une procédure de retour à l'unité comme stratégie de résolution
24 km en 12 min = 2 km à la minute
36 km en 18 min = 2 km à la minute

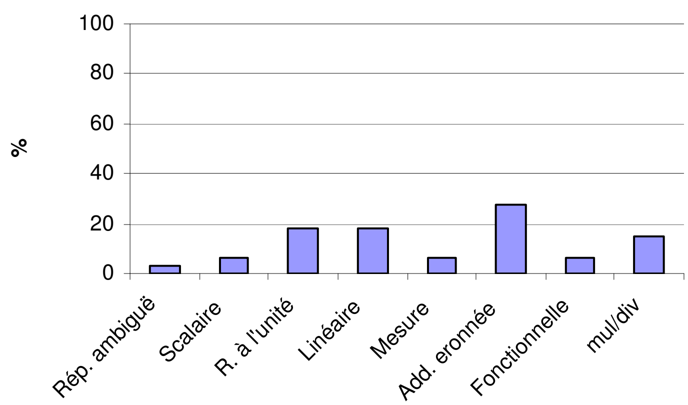
Le problème suivant « *Dans un banquet où on propose des dégustations de moules, on considère qu'il faut 72 moules pour 6 personnes. Combien faut-il acheter de moules pour 17 personnes ?* », où le rapport entre les grandeurs de même nature n'est plus évident (variable didactique introduite), a conduit là aussi à un changement de procédure chez les élèves. La seule procédure utilisée par les élèves a été celle du **retour à l'unité** ($n = 33$), comme nous montre l'exemple ci-dessous :

$72 \div 6 = 12$
$12 \times 17 = 204$ $\qquad$ rép. : 204 moules

On divise le nombre de moules par le nombre de personnes. Alors, on obtient le nombre de moules par personne. On a juste à multiplier ce nombre de moules par 17 personnes.

Dans le problème suivant, « *On sait que M. Haut mesure 6 boutons de hauteur et que M. Bas en mesure 4. Si on mesure la hauteur de M. Bas en trombones, on trouve 6 trombones. Alors, combien faudra-il de trombones pour représenter la hauteur de M. Haut ? Explique comment tu as fait pour trouver ?* » (Karplus et al., 1974), où un support visuel était donné, on a remarqué une variété de procédures utilisées par les élèves. Ci-dessous, le support visuel donné, suivi du tableau qui indique en pourcentages la fréquence des procédures utilisées.





Parmi les stratégies utilisées, on retrouve pour la deuxième fois la stratégie additive erronée (n = 9) : « M. Haut mesure 2 de plus que M. Bas. Si M. Bas mesure 6 trombones. Alors M. Haut c'est 8 trombones. »

4.1.2. Stratégies développées par les élèves dans les problèmes de proportion inverse

L'introduction de la variable « proportion inverse » fait apparaître une nouvelle procédure, soit le recours à une **grandeur intermédiaire** (n = 19). Ici, les élèves résolvent le problème en passant par une grandeur intermédiaire (reconstruction d'un « tout fictif ») pour ensuite utiliser cette valeur pour répondre à la question.

> *Une voiture parcourt une distance entre deux villes en 5 heures avec une vitesse constante de 90 kilomètres par heure. En combien de temps fera-t-elle le même voyage avec une vitesse de 75 kilomètres par heure ?*

$90 \times 5 = 450$ km
450 km $\div$ 75 = 6 heures
S'il fait 90 km par heure, ça veut dire qu'il y a 450 km entre les 2 villes. On a juste à diviser par 75 et on a la réponse.

Pour le deuxième problème de proportion inverse, « *4 machines prennent 300 jours pour fabriquer toutes les briques qui vont être utilisées dans la construction d'une maison. En combien de jours 8 machines identiques fabriqueront la même quantité de briques ?* », les élèves utilisent surtout la stratégie **scalaire** ($n = 27$) pour résoudre le problème, mais en utilisant un raisonnement inversement proportionnel, comme nous montre l'exemple ci-dessous :

4 machines = 300 jours
8 machines 150 jours
8 machines c'est le double de 4. Alors, on divise le nombre de jours en 2.
Rép. : 150 jours.

4.1.3. Ce qui ressort de l'analyse des stratégies utilisées par les élèves dans les problèmes précédents

L'analyse des productions montre le potentiel des raisonnements développés par les élèves, avant tout enseignement, raisonnements sur lesquels une introduction de la proportionnalité à l'école pourrait tabler : procédures scalaire, linéaire, fonctionnelle, retour à l'unité, recours à une grandeur intermédiaire, etc. Les élèves sont de plus en mesure de mettre en place un raisonnement inversement proportionnel, comme nous le montre le dernier problème.

La composition des problèmes permet par ailleurs de mettre en évidence l'influence de certaines variables didactiques sur les procédures de résolution développées par les élèves. On remarque ainsi que les élèves disposent, avant tout enseignement formel de la proportionnalité à l'école, d'un potentiel de procédures pour résoudre non seulement des problèmes simples de proportion directe, mais également des problèmes simples de proportion inverse. Les nombres semblent avoir une influence sur la variété de procédures utilisées par les élèves, comme on a pu le constater lors de l'analyse des problèmes, nous donnant des pistes sur différentes situations à exploiter avec les élèves en classe pour développer une telle flexibilité.

La variable « nombres »

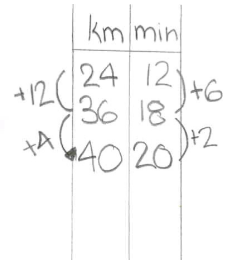
Les nombres utilisés dans l'énoncé des problèmes (rapports entre les grandeurs plus ou moins évidents) semblent en effet avoir une influence sur les procédures utilisées par les élèves : ils orientent plus vers une procédure qu'une autre. Mais au-delà de ceci, ce qu'on constate, c'est que les élèves disposent de plusieurs procédures et qu'ils sont capables de passer d'une procédure à l'autre, ce qui montre une flexibilité de leur part dans le passage d'une procédure à l'autre en fonction des conditions présentées dans le problème.

Néanmoins, la variable didactique « nombre » fait aussi apparaître des difficultés chez les élèves, dans le passage des structures additives aux structures multiplicatives (*recette de kiwi* et *M. Haut et M. Bas*). Cette difficulté montre que la proportionnalité n'est pas complètement acquise, avant tout enseignement, et qu'il y a là un travail à poursuivre...

Comme ces difficultés sont identifiées seulement dans des situations spécifiques, elles nous donnent aussi des pistes sur ce qu'il faut travailler en classe.

La variable « 3 couples »

La première remarque porte sur le fait que l'utilisation de ce type de problèmes n'est pas habituelle à l'école (René de Cotret, 1991). Nous avons observé qu'elle conduisait les élèves à utiliser un tableau, dans lesquels ils cherchent une régularité, la plupart du temps additive :



L'utilisation de ce tableau pourrait bien relever d'une influence de l'enseignement sur les suites proposé en secondaire 1, et de celui sur les tables de valeurs et graphiques en secondaire 2, avant l'enseignement de la proportionnalité. Dans ce cas, l'utilisation du tableau de nombres sort les élèves du contexte du problème. Ils recherchent une régularité sur des nombres, et perdent de vue le sens de la situation.

La variable « proportion inverse »

Lors de l'analyse des problèmes de proportion inverse, on a pu observer l'utilisation d'une nouvelle stratégie, non présente dans les problèmes de proportion directe, soit le recours à une grandeur intermédiaire (cf. § 4.1.2). On a remarqué aussi que les élèves ont recours, lors de la résolution de ces problèmes, à un raisonnement inversement proportionnel de manière contrôlée. Cela montre le potentiel des procédures de ces élèves et leur capacité à s'adapter selon le contexte et la structure mathématique du problème.

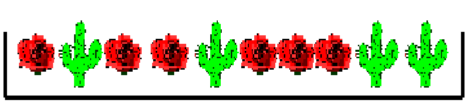
4.2. Analyse pour les problèmes qui sollicitent un raisonnement qualitatif

Une première remarque importante à faire est à l'effet que les problèmes qui sont présentés dans cette partie favorisent l'utilisation d'un raisonnement qualitatif, mais n'empêchent pas pour autant l'utilisation d'un raisonnement quantitatif. Prenant cela en compte, quelles sont alors les procédures utilisées par les élèves pour résoudre ces problèmes ?

4.2.1. Stratégies développées par les élèves dans les problèmes

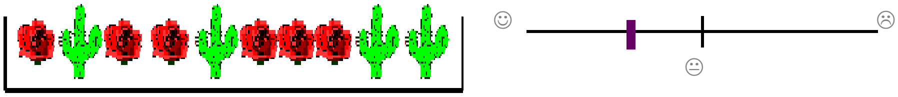
Comme cette catégorie a seulement deux problèmes, nous allons présenter les stratégies utilisées pour résoudre les deux problèmes.

Pour le problème des fleurs et cactus (l'exemple de la section 3.2), seulement 6 des 33 élèves ont utilisé une stratégie faisant appel à un raisonnement qualitatif. Voici l'exemple d'une réponse relevant de cette stratégie :



…« contente, parce qu'il y a plus de fleurs que de cactus. »

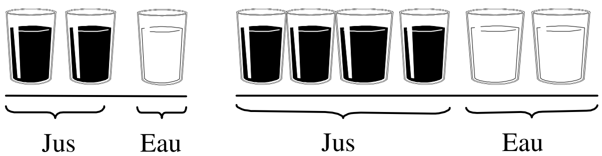
Tandis que la plupart des élèves ($n = 17$) ont utilisé une stratégie de type quantitatif pour répondre à la question. On trouve par exemple des réponses comme la suivante :



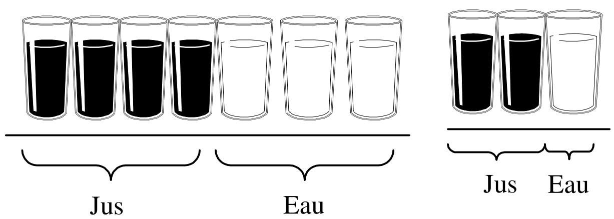
« Rép. : 6 fleurs et 4 cactus. »

Le problème du Jus d'orange.

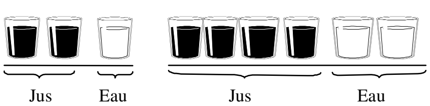
Supposons qu'on mélange les trois verres du premier groupe dans un pot et les six verres du second groupe dans un autre pot. Est-ce que ça va goûter plus le jus d'orange dans le premier pot ou dans le second ? Ou bien est-ce que ça va goûter la même chose dans les deux ?



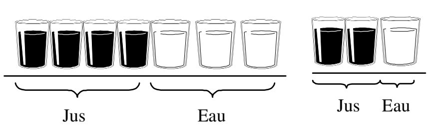
Et si maintenant, on mélange les sept verres du premier groupe dans un pot et les trois verres du deuxième groupe dans un autre pot. Lequel des deux goûtera plus le jus d'orange ? Ou bien est-ce que ça va goûter la même chose dans les deux ?



Les élèves ont eu recours à des nombres pour résoudre le problème, même si le raisonnement qualitatif ici est important. (Par exemple : si on a la même chose de jus, plus il y a d'eau, moins ça goûte le jus ; Ou alors, pour une même quantité d'eau, plus il y a de jus, plus ça goûte le jus). La stratégie la plus utilisée par les élèves a été l'établissement d'un rapport entre le nombre de verres de jus d'orange et le nombre de verres d'eau. Deux exemples de telles réponses :



« Parce qu'il y a un verre d'eau pour 2 verres de jus. Rép. : la même chose. »



« 1^er^ pot : 1 verre d'eau pour 2 verres de jus + 1 verre d'eau pour 2 verres de jus + 1 verre d'eau.
2^e^ pot : 1 verre d'eau pour 2 verres de jus.
Rép. : le 2^e^ va goûter plus. »

La plupart des élèves (n = 16) ont résolu le problème en utilisant cette procédure (nombre de verres de jus versus nombre de verres d'eau) pour les deux questions du problème. On a pu également noter que trois des élèves ont utilisé les rapports pour la première question et une stratégie additive erronée pour la deuxième question (il y a un verre de jus de plus que d'eau, ça goûte la même chose). Les autres élèves (n = 14) ont eu recours à différentes procédures : nombre de verres de jus d'orange par rapport au nombre de verres ; nombre de verres d'eau par rapport au nombre de verres… (on compare un des ingrédients au tout).

4.2.2. Ce qui ressort de l'analyse des stratégies utilisées par les élèves dans ces problèmes

Par rapport aux problèmes faisant appel à un raisonnement qualitatif, la première remarque porte sur le fait que, même si l'on s'attendait à des raisonnements qualitatifs, surtout dans le problème des cactus, les élèves ont résolu ces problèmes en ayant surtout recours à des raisonnements quantitatifs. Une question se pose à ce stade : comment solliciter chez les élèves le raisonnement qualitatif[5], comme le demande le programme d'études de l'école québécoise.

On se demande également si la variable didactique **support visuel** ne fait pas apparaître des difficultés, comme on a pu l'observer pour les problèmes de M. Haut et de M. Bas, et aussi celui du Jus d'orange, comme nous montre l'exemple de la réponse à la 2e question du problème du jus, déjà donnée ci-dessus : « les deux groupes ont tous les deux 1 verre de plus de jus que d'eau ». Comme cette difficulté est identifiée seulement dans des situations spécifiques, prendre en considération les moments où on la retrouve peut nous donner des pistes sur ce qu'il faut travailler en classe.

4.3. Analyse pour les problèmes de reconnaissance de situations non proportionnelles

L'analyse des procédures des élèves portant sur des situations non proportionnelles nous montre que les élèves semblent ne pas reconnaître ces situations non proportionnelles. Par exemple, lors du problème de la Taille d'Ophélie (l'exemple de la section 3.3), seulement huit élèves ont reconnu le problème comme étant une situation non proportionnelle. Pour ceux qui ne reconnaissaient pas la non proportionnalité du problème, avoir une réponse comme 269,75 paraissait possible.

Il en a été de même pour le **problème de la Confiture** : « *Dans une recette de confitures, il est dit que si l'on a 4 kg de fraises, il faut mettre 2 kg de sucre, ou encore, pour 8 kg de fraises, il faut mettre 6 kg de sucre. Si on veut faire la recette avec 10 kg de fraises, combien faudra-t-il mettre de sucre ?* » (René de Cotret, 1991).

Aucun élève n'a reconnu la situation comme étant non-proportionnelle. Les élèves essaient dans ce cas de trouver une régularité dans le problème en appliquant une stratégie additive, (+2, entre la quantité de sucre et de fraises), en utilisant la plupart du temps un tableau de valeurs comme support. La variable « 3 couples », comme nous l'avons vu précédemment, semble orienter les élèves vers le recours à un tableau de valeurs, qui leur fait perdre le sens de la situation.

[5] Ce raisonnement nous semble important à développer chez les élèves parce qu'il intervient dans le contrôle qu'ils vont exercer ou non dans des situations inversement proportionnelles, dans la reconnaissance de situations proportionnelles ou non, etc.

	fraise	sucre	
	4	2	
+ 4	8	6	+ 4
+ 2	10	8	

5. CONCLUSION

Dans ce travail nous avons observé des élèves de 2^{e} secondaire, avec l'objectif d'identifier les procédures qu'ils utilisent pour résoudre des problèmes mettant en jeu un raisonnement proportionnel, et cela avant tout enseignement de la proportionnalité à l'école. Nous avons aussi observé l'influence du type de problème proposé aux élèves en regard des procédures développées.

En analysant la résolution des problèmes par ces élèves, nous nous sommes aperçus que les élèves qui ne sont pas encore passés par l'enseignement formel de la proportionnalité sont capables de résoudre certains problèmes, même ceux présentant des structures mathématiques plus complexes, comme par exemple les problèmes de proportion inverse. De plus, cette expérimentation nous a aussi permis de percevoir le potentiel et la diversité des procédures utilisées par ces élèves pour résoudre tant les problèmes de proportion directe qu'inverse, et cela avant tout enseignement de la proportionnalité. Nous avons de plus observé une certaine flexibilité chez les élèves dans l'utilisation de ces stratégies. Ceux-ci présentent une capacité de passer d'une procédure à l'autre en fonction des données et du contexte du problème.

Une analyse plus fine du type de problèmes montre par ailleurs que certaines variables didactiques jouent un rôle important dans le choix des procédures par les élèves : elles guident d'une certaine manière la façon dont l'élève aborde le problème. L'analyse des variables didactiques introduites dans chaque problème nous a également permis de mettre en évidence des difficultés, par rapport à l'acquisition du concept de proportionnalité, présentes chez les élèves. On note ainsi la présence d'une procédure, et la difficulté de reconnaissance de situations non-proportionnelles. Nous avons aussi constaté d'autres difficultés présentes chez les élèves, comme la difficulté reliée à l'emploi d'un raisonnement qualitatif, qui semble peu mobilisé spontanément chez les élèves.

Pour l'enseignement, prendre en compte ces difficultés et évaluer dans quel type de situations elles sont plus présentes, apparaît une piste intéressante à considérer au moment où l'enseignant prépare ses séquences d'enseignement sur la proportionnalité. Cela peut le guider dans le choix des situations à travailler en classe, et peut l'aider à anticiper certaines difficultés des élèves. L'analyse des variables didactiques fait par ailleurs apparaître quelque chose d'intéressant à considérer dans le choix des problèmes. Ainsi, parmi l'influence de certaines variables didactiques introduites, le recours à 3 couples dans les problèmes ouvre des avenues dont l'exploration sera profitable pour l'enseignant. Nous avons observé que ce type de recours amène les élèves à un raisonnement qu'ils ont tendance à décontextualiser. L'utilisation du tableau de valeurs que l'élève est alors souvent amené à faire pourrait être l'effet de l'accent mis sur l'enseignement des graphiques, au début de la 2^{e} secondaire.

D'une manière générale, les résultats nous montrent le potentiel et la diversité des procédures qu'utilisent les élèves avant l'enseignement, procédures sur lesquelles l'enseignement aurait avantage à s'articuler.

BIBLIOGRAPHIE

BROUSSEAU, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol. 2, n°3, pp. 37-127.

CÔTÉ, B. et NOELTING, G. (1971). *Qu'est-ce qu'apprendre, comprendre, savoir ? Fonctionnement cognitif et apprentissage de la mathématique*. Télé-université, Québec.

CUELLO, R. M. (1994). Razão e proporção : o processo evolutivo da compreensão dos conceitos. Mémoire de Maîtrise. *Mestrado em Psicologia Cognitiva, UFPE.* Recife, Brésil.

RENÉ DE COTRET, S. (1991). *Étude de l'influence des variables indice de proportionnalité du thème et nombre de couples de données sur la reconnaissance, le traitement et la compréhension de problèmes de proportionnalité chez des élèves de 13-14 ans.* Thèse de doctorat inédite, Université Joseph Fourier, Grenoble.

DUMAS, J.-P. et JAQUET, F. (2001). Les tentations de la proportionnalité. *Math-école*. n°198, pp. 33-42.

DUPUIS, C. et PLUVINAGE, F. (1981). La proportionnalité et son utilisation. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 2, n°2, pp. 165-212.

GNASS, I. (2000). *Étude du raisonnement proportionnel chez les élèves en troubles de comportement et d'apprentissage de deuxième secondaire*. Mémoire de maîtrise inédit, Université du Québec à Montréal.

KARPLUS, E. F., KARPLUS, R. & WOLLMANN, W. (1974). The influence of cognitive style. *School Science and Mathematics*, 6, pp. 476-482.

LEVAIN, J.-P. et VERGNAUD, G. (1995). Proportionnalité simple, proportionnalité multiple. *Grand N*, n°56, pp. 55-66.

LEVAIN, J.-P. (1993). Proportionnalité, agrandissement et échelle. *Petit x*, n°31, pp. 15-34.

LEVAIN, J.-P. (1997). *Faire des mathématiques autrement : développement cognitif et proportionnalité*. L'Harmattan, Paris.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DU QUÉBEC (MEQ, 1980). *Programme d'étude de mathématiques du secondaire.* Les publications du Québec, Gouvernement du Québec.

MEQ. (1994). *Programme d'étude de mathématiques du secondaire.* Les publications du Québec, Gouvernement du Québec.

MEQ. (2003). *Programme d'études du secondaire.* Document de travail aux fins de validation. Gouvernement du Québec.

NOELTING, G. (1978). *La construction de la notion de proportion chez l'enfant et l'adolescent et les mécanismes d'équilibration*. Numéro spécial de L'APAME. École de Psychologie, Université Laval, Québec.

NUNES, T., SCHLIEMANN, A. D. & CARRAHER, D. (1993). *Street mathematics and school mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, Royaume-Uni.

OLIVEIRA, I. A. F. G. (2000). *Um estudo sobre a proporcionalidade : a resolução de problemas de proporção simple no ensino fundamental*. Mémoire de maîtrise inédit. Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brésil.

PEZARD, M. (1985). *Une expérience d'enseignement de la proportionnalité aux élèves instituteurs*. Thèse de doctorat inédite. Université Paris 7 – Denis Diderot, Paris.

SOKONA, S.-B. (1989). Aspects analytiques et aspects analogiques de la proportionnalité dans une situation de formulation. *Petit x,* n°19, pp. 5-27.

SOTO, I. et ROUCHE, N. (1994). Résolution de problèmes de proportionnalité par des paysans chiliens. *Repères-IREM*, n°14, pp. 5-19.

VERGNAUD, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad : problemas de la enseñanza de las matemáticas*. Trillas, Mexico.

oliveira.izabella@courrier.uqam.ca

Le contrôle exercé sur l'activité mathématique : que recouvre-t-il ? Quelle place lui donne le programme ?

MIREILLE SABOYA

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

RÉSUMÉ. Certaines composantes de l'activité mathématique de l'élève comme la vérification du résultat obtenu, la validation et la justification d'un énoncé, d'une proposition ou de la démarche adoptée dans un problème et un engagement réfléchi dans la tâche reflètent l'acquisition d'un certain *contrôle* chez l'élève face à l'activité mathématique. Dans ce texte, nous expliciterons ce que recouvre cette activité de contrôle sur un plan théorique. Pour cela, nous avons procédé à une recension d'écrits dans différents domaines : en mathématiques, en psychologie et en didactique. Ceci nous amènera à constater que la dimension *contrôle* chez l'élève dans l'activité mathématique occupe une place centrale dans les nouveaux programmes d'études au secondaire, en lien avec le développement des trois compétences.

INTRODUCTION

Devant sa production mathématique, l'élève devrait être capable de vérifier son résultat, de juger de la cohérence, de la validité, de la rigueur de sa démarche et de s'engager de manière réfléchie dans une résolution, en faisant preuve de jugement. Ces actions traduisent un *contrôle* de l'élève sur l'activité mathématique. Dans la littérature, nous avons trouvé différentes sources traitant de la notion de contrôle. Un éclairage est amené en mathématiques sur le processus de découverte (Hadamard, 1975) ; en psychologie du développement, l'activité de contrôle prend place face à des contradictions (Piaget et Bullinger, 1974) et en didactique des mathématiques, certains travaux relient l'activité de contrôle avec le processus de résolution de problèmes (Mason, 1994) et dans d'autres études en didactique, le contrôle est vu comme une activité « méta » en lien avec l'acquisition de concepts (Artigue, 1993). Cette étude bibliographique fait état d'une diversité d'approches et de points de vue qui font ressortir que l'activité de contrôle est centrale et dépendante des différentes tâches auxquelles on est confronté.

Dans les travaux concernant la résolution de problèmes (Mason, 1994 ; Polya, 1962), l'activité de contrôle est présente dans chacune des étapes de résolution.

L'ACTIVITÉ DE CONTRÔLE EN RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

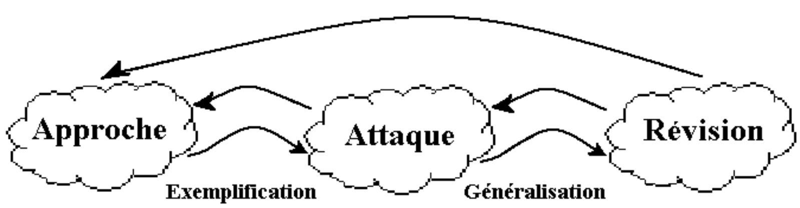
Dans son livre, Mason (1994) définit trois phases dans le processus de résolution de problèmes : la phase d'approche, la phase d'attaque et la phase de révision. Dans chacune de ces phases, une activité de contrôle est requise.

Phase d'approche
La phase d'approche est définie par Mason comme allant de la première rencontre du problème à la première tentative de résolution. On lit l'énoncé, on formule le problème en ses mots, on essaie de bien comprendre le problème, on organise, on classe les données et on regarde si on connaît des problèmes similaires. Dans cette phase, l'activité de contrôle apparaît comme une anticipation du résultat : on essaie de deviner, d'estimer le résultat. Le travail effectué dans cette phase prépare à la deuxième phase, qui est la phase d'attaque.

Phase d'attaque
Dans cette deuxième étape, il s'agit de proposer des conjectures c'est-à-dire des propositions qui semblent raisonnables, de les tester avec des exemples, de regarder si elles peuvent être réfutées par un contre-exemple. L'activité de contrôle apparaît dans le choix des directions, des stratégies à prendre ou à ne pas prendre, des exemples pertinents à considérer. Le contrôle prend place également sous forme d'évaluations périodiques tout au long de la résolution pour éviter une impasse ou continuer à explorer une voie prometteuse. Une fois la phase d'attaque finalisée, il faut prendre le temps de réviser le travail effectué, action qui dénote d'une activité de contrôle.

Phase de révision
Dans cette phase, on révise le travail produit. La notion de contrôle apparaît dans la confrontation entre le résultat obtenu et l'anticipation effectuée dans la phase d'approche. Elle prend place également lors de la vérification de la démarche produite, dans la détection de possibles erreurs.

Mason souligne que le processus de résolution de problèmes est dynamique, on peut effectuer des allers-retours entre les trois phases. Par exemple, la détection d'une erreur ou d'une imperfection à la phase de révision peut nous faire revenir sur nos pas, soit à la phase d'approche, soit à la phase d'attaque. L'activité de contrôle se définit dans la capacité à faire des allers-retours entre ces trois phases comme représenté dans le schéma ci-dessous (p. 22) :



En résolution de problèmes, l'activité de contrôle apparaît donc dans l'anticipation du résultat, lors du choix éclairé entre les différentes stratégies de résolution, lors d'évaluations périodiques, dans la détection des erreurs et dans la capacité à revenir sur la démarche adoptée pour résoudre le problème. En mathématiques (Hadamard, 1975), on retrouve ces composantes du contrôle, le contrôle guidant la découverte du mathématicien et étant présent tout au long du travail de recherche.

L'ACTIVITÉ DE CONTRÔLE EN MATHÉMATIQUES

Dans son livre, Hadamard (1975) s'intéresse à définir les conditions qui permettent les inventions et les découvertes[1] en mathématiques, à travers les témoignages de plusieurs chercheurs (sa propre expérience et d'autres, comme celles de Poincaré et d'Helmholtz). Il définit la pensée inventive comme une pensée « contrôlée » et « concentrée » :

> [...] *il y a la pensée « libre » qui a lieu lorsque nous laissons vagabonder nos pensées sans les diriger vers un but spécial ; et il y a la pensée « contrôlée » quand la direction est donnée. Il y a direction de notre pensée quand on lui demande quel jour on est ; mais le cas de la pensée inventive est visiblement différent. Elle demande un certain effort de concentration, non seulement elle est contrôlée, mais elle est concentrée* (pp. 73-74).

Le contrôle est ici défini comme une direction volontaire de la pensée pour permettre l'invention, la découverte. Hadamard présente les quatre phases qui caractérisent le processus de découverte : la préparation, l'incubation, l'illumination et la vérification-finition. Nous avons constaté qu'un certain contrôle est présent dans trois de ces quatre phases, même si ce terme n'est pas utilisé tel quel : dans les phases de préparation, d'incubation et de vérification-finition. Pour expliquer chacune de ces phases, nous allons nous appuyer sur un extrait tiré d'une conférence donnée par Poincaré à la Société de Psychologie de Paris (*Bulletin de l'Institut Général de Psychologie,* n°3, 8e année, 1908), où il parle d'une de ses plus grandes découvertes sur la théorie des fonctions fuschsiennes. À travers cet extrait, on peut relever les quatre phases qui mènent à l'invention et que nous avons identifiées entre crochets.

> *Je voulus représenter ces fonctions par le quotient de deux séries ; cette idée fut parfaitement consciente et réfléchie ; l'analogie avec les fonctions elliptiques me guidait. Je me demandais quelles devaient être les propriétés de ces séries si elles existaient, et j'arrivai sans difficulté à former les séries que j'ai appelées thétafuchsiennes.* [Phase de préparation]. *À ce moment, je quittais Caen, que j'habitais alors, pour prendre part à une course géologique entreprise par l'École des Mines. Les péripéties du voyage me firent oublier mes travaux mathématiques ;* [Phase d'incubation] *arrivés à Coutances, nous montâmes dans un omnibus pour je ne sais quelle promenade ; au moment où je mettais le pied sur le marchepied, l'idée me vint, sans que rien dans mes pensées antérieures parût m'y avoir préparé, que les transformations dont j'avais fait usage pour définir les fonctions fuschsiennes étaient identiques à celles de la géométrie non-euclidienne. Je ne fis pas la vérification ; je n'en aurais pas eu le temps puisque, à peine assis dans l'omnibus, je repris la conversation commencée ; mais j'eus tout de suite une entière certitude.* [Phase d'illumination]. *De retour à Caen, je vérifiais le résultat à tête reposée pour l'acquit de ma conscience.* [Phase de vérification].

[1] Dans l'introduction de son livre, Hadamard précise qu'il y a une distinction entre une découverte et une invention mais que dans son livre, il ne fera pas cette distinction. « La découverte concerne un phénomène, une loi, un être vivant qui existait déjà mais dont on n'avait pas la perception : Christophe Colomb a découvert l'Amérique, mais elle existait avant lui. […] Cette distinction s'est montrée moins évidente qu'elle ne semble au premier abord. […] Il existe une quantité d'exemples de résultats scientifiques qui sont des découvertes aussi bien que des inventions. […] C'est une des raisons pour lesquelles la distinction faite ci-dessus ne nous concerne pas vraiment » (op. cit., p. 9).

> *Je me mis alors à étudier des questions d'Arithmétique sans grand résultat apparent et sans soupçonner que cela put avoir le moindre rapport avec mes recherches antérieures.* [Phase de préparation]. *Dégoûté de mon insuccès, j'allai passer quelques jours au bord de la mer, et je pensai à tout autre chose.* [Phase d'incubation]. *Un jour, en me promenant sur une falaise, l'idée me vint toujours avec les mêmes caractères de brièveté, de soudaineté et de certitude immédiate, que les transformations arithmétiques des formes quadratiques ternaires indéfinies étaient identiques à celles de la géométrie non-euclidienne.* [Phase d'illumination] (op. cit., pp. 22-23).

Phase de préparation

En ce qui concerne les fonctions fuschsiennes, Poincaré s'attaqua au sujet en vain durant une quinzaine de jours, voulant prouver qu'il ne pouvait pas exister de fonctions de ce genre : idée dont il allait démontrer la fausseté. Il édifie alors une première classe de ces fonctions. Cette première phase est une phase de travail conscient de la part du chercheur. La découverte passe alors par des efforts volontaires. Dans ce premier travail, le chercheur a un objectif clair, bien défini et il travaille en connaissance de cause. Le contrôle apparaît ici comme la mise en place des relations qui existent entre ce que sait le chercheur et ce à quoi il veut aboutir, le contrôle est présent dans la phase consciente du chercheur. Dans cette première phase, ce travail apparaît souvent infructueux, le chercheur a l'impression de faire fausse route, il perçoit plusieurs voies qu'il suppose avoir des chances de conduire à la solution. Cette première étape est essentielle comme le précise Hadamard (1975, p. 50) : « La découverte dépend nécessairement de l'action préliminaire plus ou moins intense du conscient. » En effet, ces efforts ne sont pas stériles, ils mettent en branle la machine inconsciente qui va permettre au chercheur de rentrer dans la deuxième phase de la découverte : l'incubation.

Phase d'incubation

Cette deuxième phase fait partie d'un travail inconscient. Après la première phase, il reste un nombre extraordinairement grand de combinaisons. L'esprit arrive à percevoir celles qui sont fécondes ou celles qui pourraient le devenir. Le contrôle est défini ici comme la sélection entre ces idées : le chercheur n'élabore pas de combinaisons inutiles et il n'examine que celles qui sont utiles alors qu'elles ne représentent qu'une petite minorité. L'invention est un discernement, un choix. L'esprit du chercheur choisit parmi toutes les idées celles qui sont fécondes (d'où l'idée de contrôle).

Phase d'illumination

C'est le moment où l'idée traverse l'esprit pendant moins d'une seconde (dans le cas de Poincaré, le temps de poser son pied sur une marche et d'entrer dans l'omnibus). Mais ça ne signifie pas que l'idée est assez simple pour ne demander aucun travail : Poincaré nous informe qu'il a dû travailler pour la vérifier à son retour de Caen. L'illumination s'est produite avec une grande soudaineté et une absence de préparation. Elle se produit d'un coup, sans effort perceptible. Le mathématicien ne contrôle pas cette idée soudaine, elle apparaît sans crier gare.

Phase de vérification et de finition

La première inspiration de Poincaré, en montant dans l'omnibus à Coutances, suit une période préliminaire de travail délibéré. La notion de contrôle est définie ici comme une activité de vérification suite à une idée, une hypothèse. Cette étape a lieu dans le conscient. Après le travail inconscient, un travail conscient est nécessaire. En effet, le sentiment d'absolue certitude qui accompagne l'inspiration correspond en général à la réalité ; mais il peut arriver que ce ne soit pas le cas. Il faut vérifier s'il en est ainsi par l'intervention de la raison, tâche qui appartient au conscient. Cette phase englobe également la finition qui est inséparable de la vérification et dont le but est de pouvoir exposer les résultats avec précision. Après l'idée initiale, il faut passer aux calculs qui demandent de la discipline, de l'attention et de la volonté (et par conséquent un état conscient). Le contrôle se caractérise ici par la vérification des calculs qui est une partie assez mécanique du travail. Le mathématicien n'accorde pas une confiance aveugle aux résultats des règles qu'il utilise, il sait que des fautes de calcul sont possibles et même fréquentes. Le contrôle apparaît comme une perception des erreurs, comme nous l'avons vu avec Mason en résolution de problèmes. De bons mathématiciens, quand ils font des erreurs, ce qui n'est pas rare, s'en aperçoivent bientôt et les corrigent.

Il arrive souvent que la double opération de vérification et de finition du résultat ne soit pas la fin d'une recherche mais n'en constitue qu'une étape. Chaque étape de la recherche doit pour ainsi dire s'articuler à la suivante par un résultat de forme précise qu'Hadamard propose d'appeler « résultat-relais ». Notre conscient tient compte de ce premier résultat pour ensuite revenir au stade de préparation. Quand on parvient à une telle articulation, la nouvelle direction dans laquelle la recherche va se poursuivre a besoin d'être décidée, de sorte que ces bifurcations illustrent clairement l'action directrice du moi conscient (on voit ici se dessiner l'activité de contrôle). Poincaré suit sa première inspiration, en montant dans l'omnibus à Coutances, il y a ensuite une période préliminaire de travail délibéré; et après cela nous le voyons étudiant des questions arithmétiques « sans grand résultat apparent ». Il fait plusieurs déductions qui n'ont apparemment aucun lien entre elles, mais il faudra que le chercheur coordonne ces résultats pour continuer son travail de recherche.

Comme le souligne Hadamard, le contrôle est présent dans la pensée inventive, il est défini comme une direction de la pensée qui est prise de façon consciente. Mais cette direction globale se scinde en plusieurs directions. En effet, après chacune des étapes de préparation, d'incubation, d'illumination et de vérification-finition, un résultat-relais est mis en place. À partir de ce dernier, il faut décider d'une nouvelle direction à prendre. Le contrôle se définit donc par cette articulation entre les différents résultats-relais, par la décision de la direction à prendre.

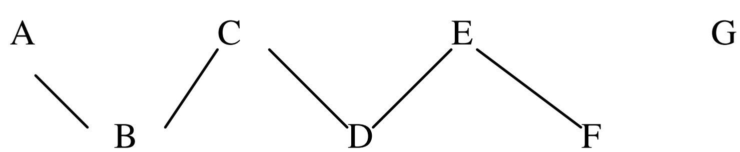
Nous pouvons constater que le contrôle est présent aussi bien dans le travail conscient du chercheur, dans les phases de préparation et de vérification-finition, que dans le travail inconscient, en phase d'incubation. Pendant la phase de préparation, le contrôle se définit par la mise en relation qui est faite entre ce que sait le chercheur et le but à atteindre : le chercheur met en marche les connaissances qu'il possède. Dans la phase d'incubation, le contrôle passe par une sélection de toutes les idées pour ne retenir que celles qui sont fécondes. Ceci se passe dans l'inconscient et dans la phase d'illumination, cette sélection d'idées devient tout simplement consciente. Finalement, dans la phase de vérification et de finition, le chercheur vérifie sa première idée, en esquissant quelques équations, en détectant les possibles erreurs de calculs qui se sont glissées. Il est intéressant de constater que le chercheur sent quand son résultat est erroné, ici c'est le contrôle global de la démarche scientifique qui rentre en jeu : le chercheur possède un ordre d'idée du résultat qu'il doit obtenir.

Dans un autre domaine, en psychologie du développement (Piaget et Bullinger, 1974), l'activité de contrôle est définie dans un autre type de tâche : face aux contradictions.

L'ACTIVITÉ DE CONTRÔLE EN PSYCHOLOGIE DU DÉVELOPPEMENT

En psychologie, l'activité de contrôle peut avoir lieu après un sentiment d'incertitude qui naît dans des situations présentant des contradictions (Piaget et Bullinger, 1974). Le contrôle intervient dans la prise de conscience de ces contradictions et dans leur dépassement, comme une réflexion rétroactive de la tâche qui repose sur la construction de négations non données au début.

D'après Piaget et Bullinger (1974), la contradiction provient de l'instabilité des résultats d'une action qui crée un déséquilibre de la part du sujet, elle naît de la difficulté à mettre en correspondance les affirmations et les négations. Pour mieux comprendre les propos de Piaget, nous allons rapporter une expérience dans le domaine logico-mathématique qu'il a menée auprès d'enfants de 5 à 12 ans. L'expérience est constituée d'une planchette rectangulaire percée de sept trous occupés chacun par un disque, tous les disques ont la même épaisseur et leur diamètre croît de proche en proche, selon des différences de 0,2 mm entre chaque disque, du premier au septième. Les disques sont nommés *A, B, C, D, E, F* et *G*. Ils sont disposés en deux rangées de la façon suivante :



Le cercle *A* a 58,8 mm de diamètre et le cercle *G* a 60 mm de diamètre. Les disques de *A* à *F* sont retenus par une chaînette, permettant la comparaison de chacun des disques avec son successeur uniquement : *B* avec *A*, *C* avec *B*, *D* avec *C*, *E* avec *D* et *F* avec *E*. Le dernier disque *G* est par contre libre, ce qui permet sa comparaison avec chacun des autres. Comme les différences entre les diamètres des disques qui se suivent est infime, imperceptible visuellement, ce qu'on perçoit, ce sont des égalités entre les diamètres des disques de *A* à *G* : $A = B$, $B = C$, $C = D$, $D = E$, $E = F$, $F = G$. Mais si on compare les diamètres des disques aux extrémités, on remarque une différence : $A < G$ (c'est pour des fins de comparaison des diamètres des disques *A* et *G* que le disque *G* est libre, qu'il n'est pas relié aux autres par une chaînette).

Les expérimentateurs laissent les enfants explorer le dispositif. Par simple perception visuelle, ils disent souvent être certains de l'égalité des diamètres des disques. Les expérimentateurs les questionnent alors sur la relation de *G* avec *A*, qu'ils doivent d'abord anticiper, puis vérifier en plaçant les disques l'un sur l'autre. Si les mesures des enfants ont suivi un ordre relevant de la transitivité, ils prennent en général conscience de la contradiction.

C'est dans le dépassement de la contradiction qu'un certain contrôle s'exerce. Dans ce cas-ci, il s'agit de faire intervenir des opérations logico-mathématiques ; il s'agit de prendre conscience des différences infiniment petites, imperceptibles entre *A* et *B*, *B* et *C*, *C* et *D*, *D* et *E*, *E* et *F*, *F* et *G*, et de comprendre que la somme de ces différences apparemment nulles devient une différence constatable entre *A* et *G*. Piaget et Bullinger remarquent que le dépassement de cette contradiction, et donc la mise en place du contrôle de l'expérience, ne va pas de soi. Du point de vue du développement, nous allons voir comment un tel processus de contrôle se met en place sur le plan cognitif.

Certains enfants de 5 à 7 ans affirment l'égalité de tous les diamètres de *A* à *G*, puis ils découvrent que *G* est plus grand que *A*. Alors ils concluent que *G* est supérieur à tous les autres, y compris *F*. Ces enfants ne voient pas de contradiction avec l'une des données qu'ils ont admises antérieurement : ils oublient aussitôt qu'ils ont vérifié que $F = G$, ils nient donc l'égalité apparente. Ce résultat permet de relever que le contrôle à exercer pour permettre la prise de conscience de toute contradiction est le souvenir des données, des constatations antérieures.

Certains enfants de 7 à 9 ans constatent une suite d'égalités transitives de *A* à *G*, puis l'inégalité imprévue entre *A* et *G*. Ils exercent donc un contrôle sur l'expérience qui leur permet de prendre conscience de la contradiction, mais ils n'arrivent pas à dépasser cette contradiction. Piaget et Bullinger rapportent plusieurs comportements, comme le fait que certains d'entre eux expriment des doutes sur leurs mesures, d'autres renoncent à comprendre, d'autres admettent que la grandeur de *G* varie, finalement certains déforment l'observable : ils disent et vérifient que *B* est plus grand que *A*. On peut remarquer que les enfants de cet âge ne possèdent pas de contrôle leur permettant de dépasser la contradiction, dont ils sont pourtant conscients.

Les enfants de 9 à 10 ans sont conduits à faire l'hypothèse de différences conçues comme imperceptibles pour lever la contradiction entre les égalités apparentes et l'inégalité finale ($A < G$), mais ils ne sont pas encore en état de déduire que celle-ci constitue la somme des différences imperceptibles. Piaget et Bullinger font l'hypothèse que l'imperceptible paraît aux enfants de cet âge ne pas être une grandeur rationnelle[2] :

> *Peut-être que ça devient toujours plus petit, mais on n'arrive pas à voir.*
> – *Comment peux-tu le savoir ?*
> – *Parce qu'on a tout essayé !* (op. cit., p. 27).

Et ils ne peuvent pas affirmer avec certitude que cet imperceptible existe :

> *Je vous ai dit, conclut ainsi Roc, que je ne savais pas exactement* (p. 26).

[2] « rationnelle » n'est pas ici à entendre au sens mathématique du terme, mais au sens de « faisant appel à la raison ».

Ce n'est que vers 11-12 ans que les enfants constatent l'inégalité $A < G$ après avoir cru à une équivalence générale et ils lèvent la contradiction en admettant l'existence de différences non perceptibles, qui sont susceptibles de s'additionner jusqu'à donner lieu à cette inégalité visible. On peut faire le constat que le contrôle qui s'exerce sous l'aspect d'une prise de conscience des contradictions et le contrôle dans le dépassement de ces contradictions est lié au développement de l'enfant. Cette partie nous éclaire donc sur la construction, le développement du processus de contrôle chez l'enfant sur un plan cognitif.

La contradiction naît de la difficulté pour les enfants à mettre en correspondance les affirmations et les négations. Piaget et Bullinger remarquent, d'après l'expérience décrite, que les enfants vivent des déséquilibres mais que la compensation entre les affirmations et les négations est insuffisante jusqu'à l'âge de 11 ans. Ils expliquent ces difficultés par le fait que :

> […] *la tendance spontanée de toute action, perception ou cognition en général est de viser l'affirmation et les caractères positifs du réel, tandis que la négation, sous ses formes nécessaires, n'est le produit que d'élaborations secondaires, et sous ses formes contingentes, de perturbations occasionnelles. L'action consiste à modifier le réel, donc à tendre vers un but positif, et il faut un effort supplémentaire de réflexion rétroactive pour apercevoir que se rapprocher de ce but implique un éloignement par rapport aux points de départ et une négation de ces états initiaux. Percevoir consiste à saisir des propriétés positives données, et il faut une attente ou une anticipation déçues pour constater qu'une présence escomptée ne se vérifie pas (ce qui dépasse d'ailleurs le champ de la perception). Il y a un manque de compensations entre les affirmations et les négations car les affirmations sont beaucoup plus prégnantes et l'emportent systématiquement sur les négations* (op. cit., pp. 11-12).

Le contrôle dans des situations de contradictions est relié à une réflexion rétroactive sur la tâche, qui repose sur une négation des faits observés (et qui proviennent donc d'une affirmation). Ce qui explique pourquoi les contradictions restent longtemps inconscientes, leur prise de conscience implique un contrôle qui passe par la construction de négations non données au début, cette construction conduisant au dépassement de telles contradictions. La prise de conscience de la contradiction ne se produit que quand le sujet est capable de dépasser la contradiction.

De plus, d'après auteurs, le dépassement requiert deux conditions :

> […] *les dépassements semblent s'effectuer toujours selon deux processus solidaires, l'un extensionnel et l'autre en compréhension : élargissement du référentiel et relativisation des notions. Ces deux processus l'un et l'autre constructifs vont toujours de pair, à des degrés divers, puisque le premier, en étendant le champ, introduit de nouveaux éléments et par conséquent de nouvelles relations, qui assouplissent les notions de départ* (op. cit., p. 160).

Dans des situations de contradiction, l'activité de contrôle prend place à deux niveaux, lors de la prise de conscience de la contradiction et lors du dépassement de cette contradiction. En didactique des mathématiques, Artigue (1993) relie l'activité de contrôle à une activité cognitive qui se situe à un niveau « méta », en lien avec le contenu mathématique.

L'ACTIVITÉ DE CONTRÔLE EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

Artigue (1993) distingue des connaissances de type méta, qu'elle nomme métaconnaissances, qui sont liées au contrôle et à la prise de décision, des connaissances qui correspondent à la définition de notions et à leurs propriétés.

À l'origine de l'intérêt de la didactique des mathématiques pour les métaconnaissances, il y a le manque d'initiative des élèves face à un problème nouveau — alors qu'ils ont appris les connaissances nécessaires à la résolution du problème — et les nombreux échecs et difficultés qu'ils rencontrent. Les chercheurs (Butlen, Lagrange et Perrin, 1989 ; Perrin, 1992) ont été alors amenés à travailler sur autre chose que sur les connaissances mathématiques. Robert (1993, p. 11) définit le méta en didactique de la façon suivante :

> *Nous utiliserons le préfixe méta devant les mots connaissances ou cognitif pour désigner des éléments d'information ou de connaissances sur les mathématiques, et leur fonctionnement ou leur utilisation, qu'ils soient généraux ou tout à fait liés à un domaine particulier. Ce peut être donc des éléments de métaconnaissance, voire de métacognition ou des connaissances métacognitives.*

Les métaconnaissances peuvent venir en aide aux élèves pour leur permettre d'anticiper, d'agir efficacement. Elles se situent à un niveau qui n'est pas celui des connaissances mathématiques, mais celui d'une réflexion sur ces connaissances ou sur l'accès à ces connaissances. Les métaconnaissances vont donc au-delà des connaissances mathématiques au sens habituel comme les définitions, les théorèmes, les propriétés, mais elles y sont très liées. On s'intéresse ici à la façon dont les élèves abordent les concepts mathématiques, à leurs représentations sur les mathématiques et à la manière de les apprendre.

Dans son article, Artigue (1993) distingue une connaissance d'une métaconnaissance sur la base de l'exemple de cinq énoncés, portant sur les différentes écritures des nombres complexes :

E1 : un nombre complexe peut s'exprimer algébriquement dans plusieurs registres : le registre cartésien qui met en évidence la décomposition en partie réelle et imaginaire : $z = a + ib$; les registres trigonométrique et exponentiel, qui mettent tous deux en évidence le module et l'argument, mais avec des caractéristiques sémiotiques différentes : $z = \rho\,(\cos\alpha + i \sin\alpha)$ et $z = \rho\, e^{i\alpha}$.

E2 : Si $z = \rho\, e^{i\alpha}$, la partie réelle de z est $\rho \cos\alpha$ et sa partie imaginaire est $\rho \sin\alpha$; si $z = a + ib$, alors son module ρ est égal à $\sqrt{a^2 + b^2}$ et son argument est donné par les relations $\cos\alpha = \frac{a}{\rho}$ et $\sin\alpha = \frac{b}{\rho}$.

E3 : Le registre cartésien est bien adapté au calcul de sommes ; les registres trigonométrique et exponentiel sont bien adaptés au calcul des produits, quotients, puissances, racines.

E4 : Si le problème à résoudre fait intervenir le calcul de la puissance n-ième d'un nombre complexe, ou la recherche de ses racines n-ièmes, il faut mettre le nombre complexe sous forme exponentielle.

E5 : Quand on résout un problème portant sur des complexes, on a intérêt à se poser la question du choix d'un registre adapté au traitement et à changer éventuellement de registre en fonction de l'avancée du traitement.

> *Ainsi il me semble important de distinguer entre des connaissances qui correspondent directement à la définition de notions et à leurs propriétés mathématiques comme E1 et E2 et des connaissances qui expriment un savoir sur la pertinence, l'efficacité d'une notion dans un contexte donné, sur les moyens de gérer cette notion comme E3, E4 et E5, voire les difficultés que l'on risque de rencontrer dans la manipulation de cette notion, les erreurs habituellement commises et donc les moments où il faut faire preuve d'une vigilance particulière. Ces connaissances sont nommées métaconnaissances* (Artigue, 1993, p. 38).

Utiliser des métaconnaissances (comme E3, E4 ou E5) représente la possibilité d'utiliser des connaissances sur des connaissances. Les métaconnaissances permettent donc une anticipation de l'action. Le contrôle dans les métaconnaissances est donc relié à la conscience des forces et des limites de l'écriture, dans l'intérêt et les avantages de chacune de ces écritures.

Artigue (1993) remarque qu'il y a une hiérarchie entre les connaissances et les métaconnaissances. Ainsi,

> [... les] *métaconnaissances générales doivent pouvoir s'appuyer sur des métaconnaissances plus locales portant sur les domaines mathématiques concernés, lesquelles à leur tour doivent s'appuyer sur des connaissances mathématiques dans ces domaines. La partie géométrique de la recherche en est ici un exemple flagrant. Ainsi, il ne sert à rien de disposer d'une métaconnaissance heuristique générale affirmant l'intérêt de l'exploration si l'on n'a pas les moyens de guider dans le contexte précis concerné une exploration efficace, de savoir qu'il est intéressant de rechercher les points fixes d'une transformation géométrique pour l'identifier si l'on n'est pas capable d'exploiter les informations recueillies ou a priori de mener à bien les calculs permettant de localiser ces points fixes* (p. 39).

Les différents travaux existant dans la littérature en mathématiques, en psychologie et en didactique des mathématiques nous éclairent sur l'activité de contrôle, activité qui est liée à la nature de la tâche à effectuer. Le contrôle dépasse le regard sur l'activité mathématique en termes de vérification et de validation, il renvoie à un choix éclairé, délibéré, à une activité méta et non à un automatisme. Cet éclairage sur la notion de contrôle amené par l'analyse bibliographique précédente permet de constater que dans les nouveaux programmes d'études au secondaire (MEQ, 2003), l'activité de contrôle prend une place centrale en lien avec les trois compétences : résoudre une situation problème, déployer un raisonnement mathématique et communiquer à l'aide du langage mathématique.

PLACE DE L'ACTIVITÉ DE CONTRÔLE DANS LE NOUVEAU PROGRAMME D'ÉTUDES DU SECONDAIRE

Dans le nouveau programme du secondaire (MEQ, 2003), l'activité de contrôle est présente dans la première compétence *Résoudre une situation problème*. Quand il s'agit de résoudre un problème, l'activité de contrôle prend place sous la forme d'un discernement, d'un choix éclairé entre les différentes stratégies, dans la mobilisation des connaissances, dans l'anticipation du résultat, dans la vérification, la validation de la solution et s'il y a lieu, dans le retour sur le problème. On retrouve dans le programme d'études du secondaire les composantes du contrôle relevées par Mason (1994) et Hadamard (1975) :

> *La résolution d'une situation-problème implique du discernement, une recherche et la mise en place de stratégies mobilisant des savoirs. Aussi l'exercice de cette compétence amène-t-il l'élève à effectuer une suite d'actions telles que décoder les éléments qui se prêtent à un traitement mathématique, représenter la situation-problème par un modèle mathématique, élaborer une solution mathématique, valider cette solution et partager l'information relative à la situation-problème et à la solution proposée. Il s'agit d'un processus dynamique qui comprend l'anticipation, le retour en arrière et le jugement critique* (MEQ, 2003, p. 240).

Cinq composantes sont reliées à la compétence *Résoudre une situation-problème* :

1. Décoder les éléments qui se prêtent à un traitement mathématique.
2. Représenter la situation-problème par un modèle mathématique.
3. Élaborer une solution mathématique.
4. Valider la solution.
5. Partager l'information relative à la solution.

Nous retrouvons une activité de contrôle dans les quatre premières composantes.

S'il s'agit de *Décoder les éléments qui se prêtent à un traitement mathématique*, l'activité de contrôle apparaît quand on demande à l'élève de « Dégager l'information contenue dans divers modes de représentation : linguistique, numérique, symbolique, graphique » et de « Cerner et décrire la tâche à accomplir en ciblant la question posée ou en formulant une ou plusieurs questions » (MEQ, 2003, p. 241). Dans la composante *Représenter la situation-problème par un modèle mathématique*, l'activité de contrôle apparaît quand il s'agit de « Comparer, au besoin, la situation à des problèmes semblables résolus antérieurement », de « Passer d'un mode de représentation à un autre » et de « Formuler des conjectures » (p. 241). Dans la composante *Élaborer une solution mathématique*, la notion de contrôle intervient quand l'élève « Estime, s'il y a lieu, l'ordre de grandeur du résultat. » Finalement, le contrôle est présent quand on demande à l'élève de *Valider la solution :* « Confronter le résultat obtenu avec le résultat attendu ; Rectifier sa solution, au besoin ; Apprécier la pertinence et l'efficacité des stratégies employées en comparant sa solution avec celle de ses pairs, de son enseignant ou d'autres sources ; Justifier les étapes de sa démarche » (p. 241).

L'activité de contrôle est également au cœur de la compétence *Déployer un raisonnement mathématique* : « Déployer un raisonnement mathématique consiste à formuler des conjectures, à critiquer, à justifier ou à infirmer une proposition en faisant appel à un ensemble organisé de savoirs mathématiques. » (MEQ, 2003, p. 242).

Au-delà de la composante « Réaliser des démonstrations ou des preuves » dans laquelle il s'agit de « [...] choisir un mode de représentation ; Utiliser les moyens propres au mode retenu ; Recourir, au besoin, à des contre-exemples pour préciser, réajuster ou réfuter des conjectures ; Mettre en forme les résultats de sa démarche ; Reprendre l'exercice, au besoin » (op. cit., p. 245), on retrouve l'activité de contrôle dans les deux autres composantes, « Former et appliquer des réseaux de concepts et de processus mathématiques » et « Établir des conjectures », quand on demande à l'élève « [d']Apprécier la pertinence des conjectures retenues ».

Finalement, dans la troisième compétence « Communiquer à l'aide du langage mathématique », l'activité de contrôle est présente dans la composante « Interpréter ou transmettre des messages à caractère mathématique », quand il faut « Valider un message pour en améliorer la compréhension, s'il y a lieu » (op. cit., p. 247).

CONCLUSION

Sur un plan théorique et dans le nouveau programme d'études au secondaire, l'activité de contrôle apparaît comme une notion centrale. Mais qu'en est-il dans l'enseignement, dans les salles de classe ? À ce propos, nous reprenons le constat de Perkins & Simmons (1988).

À partir de différents travaux de recherche portant sur les « patterns » de non-compréhension manifestés par des élèves dans différents domaines (mathématiques, physique, informatique), ces chercheurs ont développé un modèle explicatif qui permet d'expliquer ces difficultés. Quatre cadres de référence sont impliqués dans ce modèle : celui relatif au contenu, celui relié à la résolution de problèmes, le cadre épistémique et le cadre qu'ils associent à l'investigation.

L'enseignement met l'accent sur les deux premiers cadres : le contenu et la résolution de problèmes et il oublie souvent, selon les auteurs, les deux autres cadres de référence, ce qui peut expliquer les incompréhensions rencontrées par plusieurs étudiants en sciences, en mathématiques et en informatique. Ce sont deux cadres de référence qui sont au cœur de l'activité mathématique. Le cadre de l'investigation englobe les stratégies qui permettent à l'élève d'étendre ses connaissances, c'est la mise en place d'une pensée créatrice, critique,… Le cadre épistémique réfère aux « normes générales », aux stratégies sur lesquelles se fonde la validation d'un énoncé aux fondements sur lesquels on s'appuie pour dire que telle chose est valide. Il témoigne d'une compréhension plus ou moins profonde de l'activité mathématique par l'élève. On retrouve dans ces deux cadres, des composantes qui définissent une activité de contrôle et qui, d'après les auteurs, ne sont pas assez présentes dans l'enseignement des mathématiques.

Ce constat ainsi que le rôle central que joue l'activité de contrôle dans le nouveau programme d'études au secondaire nous amènent à nous interroger sur les situations, les stratégies à mettre en place dans l'enseignement pour permettre le développement d'une activité de contrôle chez l'élève.

BIBLIOGRAPHIE

ARTIGUE, M. (1993). *Connaissances et métaconnaissances – une perspective didactique.* Cahier de DIDIREM, numéro spécial, IREM, Paris 7.

BUTLEN, D., LAGRANGE, M. et PERRIN, M.-J. (1989). *Une expérience d'enseignement des mathématiques à des élèves de 6ème en difficulté.* Cahier de DIDIREM nº5, IREM Paris 7.

HADAMARD, J. (1975). *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique.* Paris, Gauthier-Villars.

MASON, J. (1994). *L'esprit mathématique*. Trad. L. Collet. Modulo éditeur, Ville Mont-Royal, Québec.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DU QUÉBEC (2003). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, premier cycle*. Gouvernement du Québec.

PERKINS, D. N. & SIMMONS, R. (1988). Patterns of Misunderstanding : An Integrative Model for Science, Math, and Programming. *Review of Educational Research*, 58 (3), pp. 303-326.

PERRIN, M.-J. (1992). Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes faibles. *Recherche en didactique des mathématiques*, 13 (1.2), pp. 5-118.

PIAGET, J. et BULLINGER, A. (1974). Transitivité et additivité des différences infraliminaires. In *Recherches sur la contradiction*, vol 1 : *Les différentes formes de la contradiction*, pp. 15-31. Sous la dir. de J. Piaget. Presses Universitaires de France, Paris.

POLYA, G. (1962). *Comment poser et résoudre un problème.* Trad. C. Mesnage. Dunod, Paris.

ROBERT, A. (1993). *Présentation du point de vue de la didactique des mathématiques sur les métaconnaissances.* Cahier de DIDIREM numéro spécial 1, IREM, Paris 7.

Validation mathématique et introduction à l'Algèbre en enseignement secondaire

GUSTAVO BARALLOBRES

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

RÉSUMÉ. Considérant l'algèbre scolaire comme un instrument de modélisation (Gascon, Bosch et Chevallard, 2001) et tenant compte du fait qu'à l'école, on ne se situe pas dans la logique des structures algébriques (position axiomatique), nous nous questionnons sur l'élaboration de certaines connaissances qui règlent le fonctionnement de cet instrument, qui permettent de contrôler la validité mathématique du travail au niveau du modèle. Nous montrons d'abord comment le système scolaire contourne la question de la validation des savoirs algébriques par l'introduction d'artéfacts didactiques construits à l'image du fonctionnement du savoir visé (par exemple, les tuiles algébriques), renvoyant ainsi la validation à un système externe aux mathématiques. Nous proposons ensuite un milieu non matériel (dans le sens de Brousseau, 1998) qui vise à mettre en place des interactions autour d'une dialectique entre le numérique et l'algébrique, dialectique incontournable, à notre avis, dans l'élaboration d'un système de validation interne. Dans ce contexte, nous analysons le changement nécessaire du statut de certaines connaissances arithmétiques, en particulier des connaissances sur la distributivité de la multiplication sur l'addition, et les difficultés que ce changement pose aux élèves de 2^{e} secondaire d'une école montréalaise. Nous interprétons ces difficultés dans le cadre spécifique de la situation et dans un contexte institutionnel plus large, en analysant le fonctionnement de ces connaissances sur le travail arithmétique qui a précédé l'introduction à l'algèbre.

1. INTRODUCTION

Considérant, avec Gascon, Bosch et Chevallard (2001), qu'une fonction importante de l'algèbre scolaire est celle qui en fait un instrument de modélisation, et prenant en compte qu'à l'école, on ne se situe pas dans la logique des structures algébriques (position axiomatique), nous nous questionnons donc sur l'élaboration de certaines connaissances qui règlent le fonctionnement de cet instrument et qui permettent de contrôler la validité mathématique du travail au niveau du modèle.

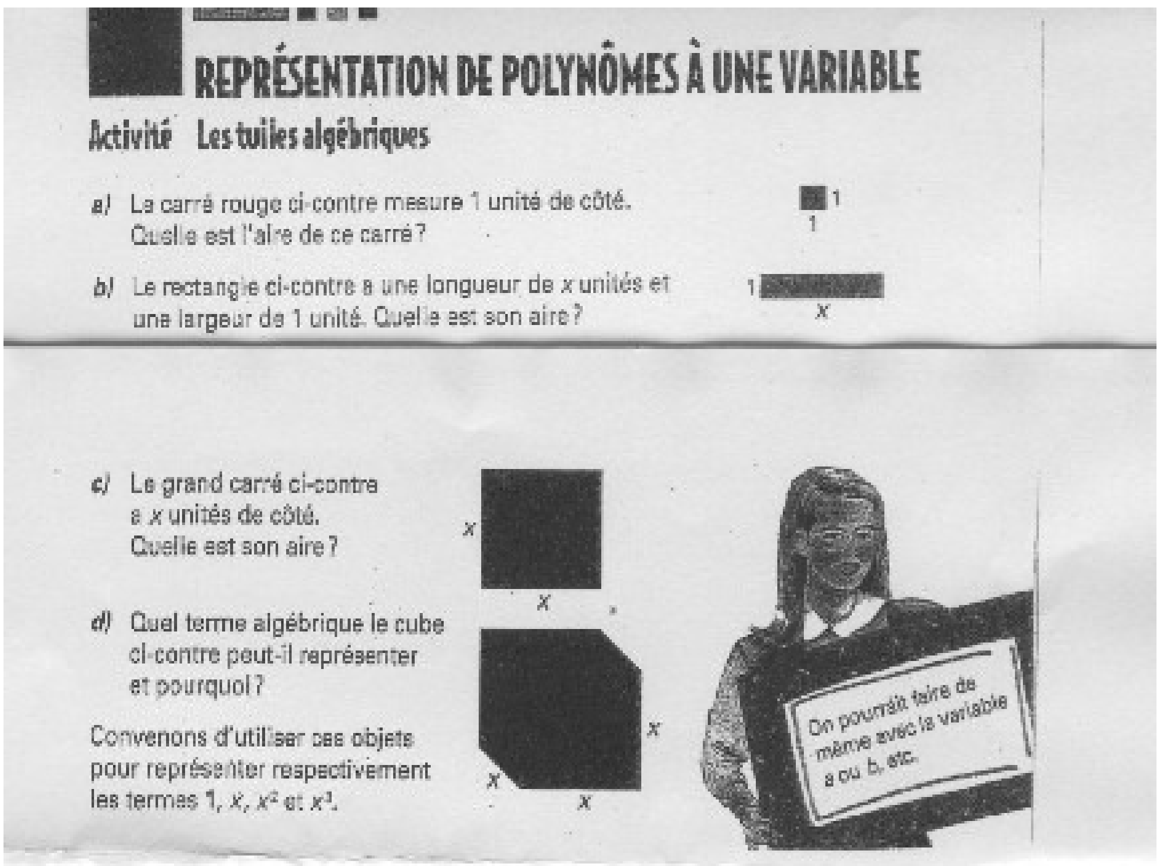
D'abord, nous montrerons rapidement comment le système scolaire contourne la question de la validation des savoirs algébriques par l'introduction d'artefacts didactiques construits à l'image du fonctionnement du savoir visé (par exemple, les tuiles algébriques), renvoyant ainsi la validation à un système externe aux mathématiques. Nous proposons ensuite un milieu non matériel (dans le sens de Brousseau, 1998) qui vise à mettre en place des interactions autour d'une dialectique entre le numérique et l'algébrique, dialectique incontournable, à notre avis, dans l'élaboration d'un système de validation interne. Dans ce contexte, nous analysons le changement nécessaire du statut de certaines connaissances arithmétiques, en particulier des connaissances concernant la distributivité de la multiplication sur l'addition, et les difficultés que ce changement pose aux élèves de deuxième secondaire dans une école montréalaise.

2. LA VALIDATION DANS LE SYSTÈME SCOLAIRE

La problématique de la validation intellectuelle dans les institutions scolaires semblerait relever du domaine exclusif de la géométrie. Claudine Mary (1999) a identifié l'absence de validation en algèbre dans les manuels scolaires, notamment dans les situations invitant les élèves à observer des régularités et à exprimer en langage symbolique « la » règle reliant un nombre et son rang dans une suite.

Nous avons montré que les manuels scolaires contournent la question de la validation des savoirs algébriques par l'introduction d'artefacts didactiques construits à l'image du fonctionnement du savoir visé (par exemple les tuiles algébriques), renvoyant la validation à un système externe aux mathématiques (Barallobres, à apparaître).

Dans ce système, l'unité est représentée par l'aire d'un carré de coté 1, la variable x par l'aire d'un rectangle de cotés 1 et x, l'aire d'un carré de coté x représente x^2 et le volume d'un cube de coté x représente x^3. Voici la proposition du manuel *Carrousel* (Breton, 1995).



Présentation des tuiles algébriques dans la collection *Carrousel Mathématique,*
3e secondaire, tome 1, p. 248 (Breton, 1995)

Des couleurs différentes sont associées aux coefficients positifs et négatifs. Les opérations sur les polynômes sont définies en utilisant ces représentations géométriques, énonçant des règles dans ce nouveau système, comme :

- « additionner un tout, c'est additionner chacune de ces parties »
- « soustraire un tout, c'est soustraire chacune de ces parties et soustraire une partie revient à additionner son opposé » ; etc.

Les limites du modèle surgissent rapidement : par exemple l'équivalence entre $3(-x^2)$ et $-3x^2$ ne peut pas être justifiée dans ce contexte, la représentation de polynômes de dégré supérieur à 3 est impossible...

L'algèbre est un « ensemble de règles d'action ». Dans ce nouveau système, l'auteur définit les règles de manière à ce qu'elles soient en correspondance avec le fonctionnement des savoirs algébriques en question ; il ne peut donc que les communiquer sans aucun type de justification. La validation est ainsi absolument contextuelle et externe à la mathématique.

Ensuite, une décontextualisation abrupte permet l'introduction des polynômes avec des coefficients rationnels, afin de pouvoir entrer finalement dans le monde des calculs algébriques ; elle n'a pas de support (de connaissances) pour le traitement des objets qui en résultent et n'a pas non plus l'intention de produire une étude « mathématique » de ces objets (ce qui impliquerait d'aborder le problème de la validation des savoirs développés). Elle vise plutôt à fournir un ensemble « de règles » (qu'il faut accepter sans comprendre les raisons mathématiques de leur fonctionnement) pour pouvoir pallier les limites de la contextualisation. Ainsi, l'algèbre est loin d'être un outil de modélisation. La validation des calculs se rapporte toujours au contexte « concret ». La représentation de variables par des objets physiques, puis l'élimination de la dialectique arithmétique-algèbre, rendent impossibles les validations mathématiques (ou la construction de connaissances qui pourraient permettre la construction de normes de validation en algèbre). On ne fait jamais appel aux propriétés des opérations (à des savoirs mathématiques) pour justifier l'équivalence d'expressions algébriques ou pour calculer à l'aide des polynômes : par exemple, il n'existe aucune référence dans les manuels à la propriété distributive pour justifier l'équivalence $3n + 2n = 5n$ (Barallobres, à paraître).

3. LA DIALECTIQUE ARITHMÉTIQUE-ALGÈBRE, À LA BASE DE L'ÉLABORATION DE CONNAISSANCES POUR LA VALIDATION INTELLECTUELLE

Les rapports arithmétique-algèbre ont été caractérisés par différents chercheurs en termes de continuités et de ruptures (Arzarello, 1993 ; Balacheff, 2001 ; Bednarz et al., 1996 ; Chevallard, 1989 ; Grugeon, 1995 ; Kieran et al., 1996 ; Lemoyne et al., 1996 ; Lins, 2001 ; Radford, 1999, 2003 ; etc.). La problématique du rapport entre le traitement sémantique (contextuel) et le traitement syntaxique des expressions algébriques a été abordée, entre autres, par Arzarello (1999), Boero (2001) et Balacheff (2001). La suspension du sens contextuel dont le but est d'entrer dans le plan syntaxique n'implique pas l'absence de sens mais plutôt la construction d'un sens « interne », dans le contexte duquel la validation intellectuelle pourrait avoir une place. À notre avis, cette construction ne peut ignorer la dialectique arithmétique-algèbre et les règles du fonctionnement de l'algébrique ne peuvent que s'élaborer à l'intérieur de cette dialectique.

Notre travail s'insère au cœur de cette dialectique, en essayant de mieux comprendre la place de l'arithmétique (le fonctionnement des connaissances arithmétiques) dans la construction et la validation de l'algèbre scolaire. Un des aspects fondamentaux à considérer est le changement de statut des opérations arithmétiques et de leurs propriétés : d'outils permettant d'obtenir un résultat numérique ou de le contrôler, elles deviennent moyens servant à établir des équivalences d'expressions numériques/algébriques (calculer et valider : Broin, 2002).

La construction d'un espace didactique, favorisant ce changement de statut dans les classes de mathématiques, devient nécessaire à notre étude. Les questions suivantes ont guidé la construction d'une situation qui pourrait se placer à l'intérieur de cet espace.

1. *Dans quel contexte (à l'intérieur de la dialectique arithmétique-algèbre) serait-il nécessaire d'établir l'équivalence d'expressions numériques-algébriques ?*

Chevallard (1989) propose l'étude de certaines propriétés numériques et leur validation, comme un contexte possible en vue de donner un sens au calcul algébrique. Mais certaines recherches (Arsac, 1997 ; Hoyles, 2000) et aussi notre expérience personnelle démontrent que, lorsqu'il s'agit de valider une propriété numérique (en général, incluant un domaine de validité infini), les preuves des élèves ne dépassent pas, majoritairement, l'empirisme naïf (Balacheff, 1987). L'établissement des équivalences d'expressions numériques/algébriques pourrait acquérir un sens dans le contexte des preuves intellectuelles et non pas dans celui des preuves empiriques. Alors :

2. *Comment aider les élèves à dépasser ce niveau empirique de validation et leur permettre d'entrer dans un jeu intellectuel ?*

Pour étudier ces questions, nous avons choisi de construire des situations didactiques (Brousseau, 1998) dans lesquelles l'enjeu n'est pas la détermination de la vérité d'une propriété numérique, mais plutôt l'explication de ce pourquoi elle est vraie ou ne l'est pas. Une question encore plus précise découle de ce choix :

3. *Quelles conditions didactiques permettraient d'engager les élèves dans la recherche d'une explication et dans la recherche de la compréhension ?*

Pour Piaget (1974) la compréhension est une recherche d'équilibre, elle implique la recherche des raisons qui ont amené le résultat obtenu. Selon DeBlois (1995), pour qu'il y ait recherche de compréhension, la poursuite d'un but doit être perturbée par un obstacle ou une lacune, le résultat obtenu doit surprendre. Toutefois, la pensée offre d'abord des résistances aux changements en annulant ou en rejetant la perturbation qui provoque un déséquilibre. L'enfant arrive alors à réaliser des compensations incomplètes mais plus économiques.

La situation que nous présenterons — construite dans le cadre d'une ingénierie didactique (Artigue, 1990, 2002) — a été choisie de façon à provoquer certains déséquilibres. La recherche d'un équilibre va exiger un fonctionnement différent des opérations arithmétiques et de leurs propriétés.

4. LA CONSTRUCTION D'UN MILIEU POUR LA VALIDATION ET LES VALIDATIONS PRODUITES PAR LES ÉLÈVES

Nous présentons une description générale de la situation. Une analyse détaillée se trouve dans Barallobres (2005).

4.1. La situation retenue

Il s'agit d'un jeu auquel participent des équipes de 4 élèves au maximum. Chaque équipe doit choisir deux nombres naturels, le second étant plus petit que 3 000, et faire les calculs suivants :

1) Trouver le produit des nombres choisis.
2) Ajouter 7 au premier nombre choisi et multiplier ce résultat par le second nombre choisi.
3) Enlever au résultat obtenu en 2) le résultat obtenu en 1).

L'équipe gagnante sera celle qui obtiendra comme résultat final le nombre le plus grand.

4.1.1. Pourquoi cette situation peut-elle provoquer un déséquilibre ?

Nous avons choisi deux variables fondamentales en rupture avec les pratiques arithmétiques :

1. Dans les pratiques arithmétiques, un résultat est en général dépendant de l'ensemble des données du problème. Dans notre situation, le résultat ne dépend pas d'une des variables engagées pour l'obtenir.

2. Une autre caractéristique dominante des pratiques arithmétiques est l'unicité de la solution dans la résolution des problèmes. Dans notre situation, il y a une infinité de solutions. La limite imposée au choix du deuxième nombre garantit l'existence d'une valeur maximale, pour une infinité de paires de valeurs initiales.

Le déséquilibre ne se produira pas au niveau des résultats obtenus (on s'attend à ce que tous les groupes gagnent au jeu), mais au niveau des processus engagés pour les obtenir : sur la base d'hypothèses différentes quant aux processus de production des résultats, les équipes obtiendront des résultats gagnants. Lever la contradiction implique d'entrer dans un jeu intellectuel.

4.1.2. Quelles sont les connaissances impliquées dans la recherche d'un équilibre ?

La recherche d'un équilibre exigera une prise de conscience des relations qui portent sur le processus engagé dans l'obtention des solutions : ce processus, lié à l'algorithme proposé dans l'énoncé de la situation, devient objet de réflexion et provoque l'analyse des relations impliquées dans l'algorithme donné. Comme il s'agit de l'entrée en algèbre (les lettres ne sont pas encore disponibles pour représenter les relations impliquées), cette analyse exige le développement d'une nouvelle pratique : garder des traces relatives aux opérations faites sur les nombres choisis, lire des informations dans les écritures numériques produites et opérer sur ces écritures afin de produire de nouvelles informations. Cette nouvelle pratique devrait impliquer un fonctionnement différent des connaissances sur les opérations qui ont trait aux nombres naturels et à leurs propriétés.

4.2. Les productions des élèves : à la recherche de l'équilibre

Nous avons expérimenté la situation dans deux classes de deuxième secondaire d'une école montréalaise. Nous présentons les trois types d'explications produites par les élèves.

a. *L'exemple particulier*

E44 : Mettons 900 000 et 2 999.
$900\,000 \times 2\,999$ ça fait 2 699 100 000 (1)
+ 7
$900\,007 \times 2\,999$ ça fait 2 699 120 993 (2)

L'élève souligne 20 993 et remarque que même si les 5 premiers chiffres sont égaux (dans (1) et (2)), la différence est toujours 0 pour les 5 premiers chiffres et 20 993 pour ce qui reste.

Les élèves de ce groupe expriment oralement qu'il y a un lien entre 20 993 et le « 7 » ajouté au deuxième pas, mais ils ne reconnaissent pas encore, dans l'écriture à gauche, la relation spécifique avec ce « 7 ». Ils doivent passer par les résultats pour montrer qu'on obtient 20 993. Afin d'éviter de « cacher » ce qu'ils veulent montrer, les élèves choisissent des nombres spécifiques — qui se terminent par des zéros — afin de pouvoir « garder la trace ».

Pour nous, il n'y a pas, dans cette explication de changement, de fonctionnement des connaissances arithmétiques. Pourtant, cette preuve empirique (différente de l'empirisme naïf, au sens de Balacheff) est un point d'appui permettant un plus grand niveau d'explicitation. Mais la particularité sur laquelle cette preuve empirique se fonde ne résiste pas à la question de la généralité.

b. *L'exemple générique* (Balacheff, 1987)

E3 : On considère 10 et 8.
E1 : $10 \times 8 = 80$. Maintenant, 17×8, ça fait 136.
E3 : Non, d'abord on sépare le 17, on fait 10 plus 7.
Puis, on fait 10×8 et 7×8. Le premier fait 80 et le deuxième fait 56. On fait l'addition et on obtient 136.
Dans le premier calcul, tu as fait $10 \times 8 = 80$ et dans le deuxième calcul, 10×8 et 7×8, 17×8, ce qui fait 136. Après, il faut faire la différence entre ce résultat et 80 ; ça fait 56.
E3 : Alors, si tu le fais directement, $10 \times 8 - 10 \times 8$ ça fait 0
et il reste $7 \times 8 = 56$. As-tu compris ?
E1 : Pas trop, laisse-moi penser...

Le choix de nombres plus petits pour « mieux comprendre » laisse entrevoir le caractère générique de l'exemple utilisé (ils avaient proposé auparavant les nombres 2 000 et 2 999).

Le premier nombre se termine, encore une fois, par 0. Ce choix facilite les calculs et permet de garder la trace de ce qui a été ajouté (10 et 17). Les opérations et leurs propriétés ne sont pas utilisées seulement comme moyens de calcul, ils sont aussi des moyens pour exprimer les relations engagées. L'algèbre, même sans lettres, n'est pas un outil de modélisation du problème : les premières écritures sont 2 007 et 17 et non pas 2 000 + 7 ou 10 + 7. Le premier outil est l'arithmétique, qui devient insuffisante à mesure que le problème avance. Un fonctionnement algébrique du numérique commence à émerger : ces élèves avaient déjà identifié, pendant le moment exploratoire de l'activité, le rapport entre 20 993 et 7 × 2 999 (transformation et anticipation, Boero, 2001). De plus, ils se sont posés, à eux-mêmes, la question de la généralisation.

c. *Lorsque les lettres apparaissent*

E3 : On a remplacé le premier nombre par y et le deuxième nombre par z.
La deuxième étape est $y + 7$ fois z :
$(y + 7) \times z$; ce qui reste est $(y + 7) \times z - y \times z$.
Mais y s'annule $(\cancel{y} + 7) \times z - \cancel{y} \times$ z
ça fait $7 \times z$ et z est 2 999.

Prof (s'adressant à la classe) : Comprenez-vous ?

Certains élèves : Oui !

E1 : C'est pas correct, parce que l'on peut pas faire $-y + y$ à cause que $y \times z$ sont ensembles et $y + 7$ est en parenthèses… de toute façon si on pouvait le faire, il resterait deux « z », il resterait pas juste $7 \times z$… il y aurait plus de « z »…

Prof : Avez-vous compris ce qu'elle dit ?
(Silence)

E2 : On peut écrire $y \times z + 7 \times z - y \times z$.

Prof : Pourquoi ?

E3 : Parce que $(y + 7) \times z$ ça fait $y \times z + 7 \times z$.

E1 : Et $y \times z$ s'annule…

Prof : Êtes-vous d'accord ?

Certains élèves : Oui! (peu d'élèves participent à la discussion).
(…)

E1 : Moi, il y a quelque chose que je comprends pas…
dans $y \times z + 7 \times z - y \times z$, pourquoi y a-t-il un plus ?

E4 : Parce que lorsque tu écris $(y + 7) \times z$, comme l'on a ajouté quelque chose à « y », on a « plus » que $y \times z$… on a enlevé la parenthèse, on a fait $y \times z$, après $7 \times z$ et ensuite la somme.

Prof : Qu'est-ce que vous en pensez ? (SILENCE)

Observateur : Comment faites-vous 99 × 5 ?

E12 : 100 × 5 moins 1 × 5.

Observateur : Si l'on a 201 × 5, pourrait-on écrire 200 + 1 fois 5 ?

Élèves : Oui, on fait 200 × 5 + 1 × 5.

Observateur : Cette écriture a l'air de quoi ? Quelqu'un a déjà entendu le mot *distributivité* ?

Certains élèves : Quoi ? Non.

Même si les élèves utilisent des lettres pour modéliser les relations impliquées dans le problème, le rapport entre les propriétés du système modélisé et celles de l'instrument de modélisation ne va pas de soi. De fait, ils utilisent implicitement la propriété distributive sur le plan numérique — même s'ils ne la reconnaissent pas explicitement — mais l'introduction de nouveaux objets (l'expression algébrique $(y + 7) \times z$) pose des difficultés. L'exemple proposé par l'observateur n'est pas reçu par la classe comme ayant caractère d'exemple générique, c'est-à-dire comme un lien possible entre le particulier et le général. La définition des opérations sur ces nouveaux objets (expressions algébriques) ainsi que leurs propriétés exigent plus qu'une simple généralisation des propriétés de l'arithmétique.

5. EN GUISE DE CONCLUSION

Tel que Chevallard (1989) le remarque, entre le fonctionnement arithmétique et le fonctionnement algébrique, il y a une distance — un saut — que nul procédé « d'abstraction » (dans le sens de « tirer la théorie de la réalité ») ne peut venir combler. Pour Piaget et Garcia (1982), ce saut est le fruit de plusieurs généralisations constructives (processus de réorganisation des constructions antérieures) et non pas inductives : il ne s'agit pas d'assimiler de nouvelles connaissances à des formes déjà construites mais d'engendrer de nouvelles organisations structurelles.

Si la propriété distributive peut se justifier, pour les nombres naturels et rationnels positifs, en faisant appel aux définitions des opérations et à d'autres propriétés, comment apparaît-elle pour des nombres relatifs ? Le sens de la multiplication des nombres relatifs et de leurs propriétés implique déjà un fonctionnement particulier des connaissances arithmétiques. Comme Glaeser (1981) le remarque, la révolution accomplie par Hankel consiste à renoncer à la nature des exemples pratiques qui « expliquent » les nombres relatifs et à accepter qu'il s'agisse de nombres *inventés, imaginés.*

En connaissant les propriétés additives de $\mathbb{R}$ et la multiplication dans $\mathbb{R}^+$, Hankel propose explicitement de « prolonger » la multiplication de $\mathbb{R}^+$ à $\mathbb{R}$ en respectant *un principe de permanence* : la structure algébrique cherchée doit avoir de bonnes propriétés, entre autres, les distributivités à gauche et à droite ! Il s'agit d'une rupture idéologique, un saut épistémologique permettant d'accepter la nature idéalisée des objets mathématiques, en vue de les insérer dans un discours hypothético-déductif.

Quelles organisations (et réorganisations) des connaissances arithmétiques sont nécessaires pour favoriser le saut épistémologique qu'implique la reconstruction de l'algèbre scolaire ? Comment les organiser didactiquement ? Quelles problématiques pourraient commander ce saut épistémologique, dans le cadre d'une reconstruction artificielle des savoirs ?

Enfin, quelles sont les caractéristiques de la dialectique arithmétique-algébrique, dialectique nécessaire, à notre avis, à la reconstruction scolaire de l'algèbre ?

BIBLIOGRAPHIE

ARSAC, G. et MANTES, M. (1997). Situations d'initiation au raisonnement déductif. *Educational Studies in Mathematics*, n°33, pp. 21-43.

ARTIGUE, M. (2002). Ingénierie didactique : quel rôle dans la recherche didactique aujourd'hui ? In *Les didactique des disciplines scientifiques : concepts et méthodes*, pp. 18-43. Presses Universitaires du Mirail, Toulouse, France.

ARZARELLO, F., BAZZINI, L. & CHIAPPINI, G. (2001). A Model for Analysing Algebraic Processes of Thinking. In *Perspective on School Algebra*, pp. 87-103. R. Sutherland, T. Rojano, R. C. Lins, éds. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Pays-Bas.

ARZARELLO, F. (1993). Analysing Algebraic Thinking. In *Algebraic Processes and the Role of Symbolism*, pp. 35-41. R. Sutherland, éd. Proceedings of the ESRC Working Conference. Institute of Education, University of London, Londres.

BALACHEFF, N. (2001). Symbolic Arithmetic vs Algebra. The core of a didactical dilemma. In *Perspective on School Algebra*, pp. 189-205. R. Sutherland, T. Rojano, R. C. Lins, éds. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Pays-Bas.

BALACHEFF, N. (1999). Apprendre la preuve. In *Le concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle*, pp. 197-236. J. Sallantin et J. J. Szczeciniarz, éds. Presses Universitaires de France, Paris.

BALACHEFF, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, n°18, pp. 147-176.

BARALLOBRES, G. (2005). La validation intellectuelle dans l'enseignement introductif de l'algèbre. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 24, n° 2-3, pp. 285-328.

BARALLOBRES, G. (à apparaître). *Enseignement introductif de l'algèbre et validation.* Thèse de doctorat. Université de Montréal.

BEDNARZ, N., KIERAN, C. & LEE, L. (1996). *Approaches to Algebra: perspectives for research and teaching*. Kluwer Academics Publishers, Dordrecht, Pays-Bas.

BELL, A. (1995). Purpose in school algebra. In *New perspectives on school algebra. Papers and discussions of the ICME-7 algebra working group*, pp. 41-73. C. Kieran, éd. Journal of Mathematical Behavior, n°14.

BOSCH, M. et GASCON, J. (2001). *Organiser l'étude – Théories et empiries.* Actes de la XI^e École d'Été de Didactique des Mathématiques, pp. 23-40. Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble.

BROIN, D. (2002). *Arithmétique et Algèbre élémentaires scolaires*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux I.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD, Y. (1991). *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné.* Deuxième édition augmentée. Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. *Petit x*, n° 5, pp. 51-94.

CHICK, H. (2001). *The Future of the Teaching and learning of Algebra*. 12th ICMI Study, University of Melbourne, Australie.

DE BLOIS, L. (1995). La place de l'erreur dans le développement de la compréhension en mathématiques. *Instantanées mathématiques*, Vol. XXXI, n° 2, pp. 4-7.

GASCON, J., BOSCH, M. & BOLEA, P. (2001). Como se construyen los problemas en didactica de las matematicas, Parte II : El algebra escolar en el Programa Epistemologico. *Educacion Matematica*, 5, pp. 25-43.

GLAESER, G. (1981). Épistémologie des nombres relatifs. *Recherches en didactiques des mathématiques*, Vol. 23, pp. 34-55.

GRUGEON, B. (1995). *Étude des rapports personnels et des rapports institutionnels à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : B.E.P. et Première G*. Thèse de doctorat inédite, Université Paris 7.

HANNA, G. (1990). Some Pedagogical Aspects of Proof. *Interchange,* vol. 21, pp. 6-13.

HAREL, G. & SOWDER, L. (1998). Student's Proof Schemes. *Research on collegiate Mathematics*, vol. 3, pp. 56-78.

HEALY, L. & HOYLES, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra*. Journal for Research in Mathematics Education*, n° 31, pp. 396-428.

LEYMONE, G., CONNE, F. et BRUN, J. (1993). Du traitement des formes à celui des contenus d'écritures littérales : une perspective d'enseignement introductif de l'algèbre. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Vol. 13, n° 3, pp. 333-384.

LINS, R. (2001). The production of Meaning for Algebra : a Perspective Based on a Theoretical Model Semantic Fields. In *Perspective on School Algebra*. R. Sutherland, T. Rojano, R. C. Lins, éds. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Pays-Bas.

MARGOLINAS, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques.* Éditions La pensée sauvage, Grenoble.

MARY, C. (1999). *Place et fonctions de la validation chez les futurs enseignants des mathématiques au secondaire.* Thèse de doctorat. Université de Montréal.

PIAGET, J. (1974). *Réussir et comprendre*. Presses Universitaire de France, Paris.

RADFORD, L. (2003a). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs : A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, Vol. 5, n°1, pp. 37-70.

RADFORD, L. (1999). El aprendizaje del uso de signos en algebra. Una perspectiva post-Vigotskiana*. Educacion Matematica*, Vol 11, n°3, pp. 24-42.

SIERPINSKA, A. (1995). *La compréhension en mathématiques*. Trad. P. Mayer. Modulo Éditeur, Ville Mont-Royal, Québec.

barallobres.gustavo@uqam.ca

UQAM, Département d'éducation et formation spécialisées

Validation autour de la notion de complétude de l'ensemble des nombres réels

ANALÍA BERGÉ

CONCORDIA UNIVERSITY

RÉSUMÉ. En analysant l'évolution de l'idée du « continu » dans l'histoire des mathématiques, la façon dont se sont établis les liens entre cette idée et la notion moderne de complétude, et les choix didactiques effectués pour introduire et travailler ces notions, nous nous sommes trouvés confrontés à des réflexions didactiques sur la preuve et la rigueur. Nous présentons comment dans l'histoire la notion de complétude apparaît de façon multiforme, la diversité étant liée notamment à au degré d'explicitation et au statut qui sont donnés à cette notion : on constate que la rigueur et la précision des définitions sont au cœur des changements de statuts. Dans l'enseignement, nous pressentons quelques difficultés qui surgiront, si l'on utilise cette propriété dans les démonstrations des énoncés qui, dans les contextes de représentations graphiques, semblent être évidents.

1. INTRODUCTION

Nous avons l'intention, à travers ce travail, de contribuer à l'analyse des conditions didactiques qui pourraient favoriser l'évolution du travail mathématique — par rapport aux exigences de rigueur, d'exactitude, de justification et de preuve — chez les étudiants des premiers cours universitaires. Nous aborderons ces questions dans un contexte particulier : la notion de complétude de l'ensemble des nombres réels ($\mathbb{R}$). Dans le travail suivant, nous utiliserons le mot *complétude* pour nous référer à la propriété de $\mathbb{R}$ qui peut être présentée comme

> *chaque ensemble de nombres réels, non vide et borné supérieurement, admet une borne minimale (ou plus petite borne supérieure, ou supremum) qui appartient à* $\mathbb{R}$

ou sous des formes équivalentes. Nous utiliserons le mot *continuité* pour nous référer à la propriété analogue vérifiée par la droite.

De façon générale, ce travail s'inscrit dans ce qui a été dénommé *Didactique de l'Analyse* selon l'optique française. M. Artigue (1998) soutient qu'en Analyse, comme aussi dans d'autres domaines, on travaille d'abord sur des objets préconstruits, auxquels on essaie de donner un sens par un ensemble de pratiques. À son avis, ce n'est que dans un dernier temps que ces objets vont prendre le statut d'objets construits assujettis à des définitions. Nous pouvons interpréter ceci dans le cas de l'ensemble des nombres réels : nous constatons que dans les premiers cours universitaires de calcul différentiel, les étudiants appuient leur travail sur une notion intuitive de l'ensemble des nombres réels, avec des idées où des formes de représentation qui rendent le travail des étudiants non opérationnel et n'habilitent pas non plus ceux-ci à écrire des démonstrations. Quand on passe à l'Analyse, une véritable reconstruction est nécessaire. Cela pose des problèmes qui, d'après moi, sont reliés à la rigueur et à la preuve, comme on peut voir dans les deux exemples suivants. Les étudiants d'Analyse I[1] doivent faire l'exercice suivant.

Exercice : Soit f une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$, et telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Démontrer que f est surjective.

L'énoncé de cet exercice n'est pas nouveau pour les étudiants mais ce qui les étonne, c'est d'avoir à le démontrer. Face à un tel exercice, d'habitude, les étudiants posent des questions comme celles-ci : « Est-ce que c'est nécessaire de démontrer ça ? », « Ça, on le voit. Je ne comprends pas ce que vous voulez que je démontre », « Qu'est-ce que je peux considérer comme valide ? », « Jusqu'où est-ce que je dois démontrer ? », « Par où je dois commencer pour démontrer ça ? ». Dans ces questions, nous trouvons deux types de difficultés du côté des étudiants. Premièrement, il semblerait qu'ils ne considèrent pas cet exercice comme une tâche légitime. En effet, les deux premières questions suggéreraient qu'il n'y a rien à démontrer, compte tenu que l'énoncé semble évident. De plus, on entend très souvent des commentaires similaires à celui de la deuxième question : il semblerait que les étudiants voient la démonstration de tels énoncés comme une tâche à accomplir pour satisfaire l'enseignant, plus que comme une activité intéressante pour eux du point de vue mathématique. Deuxièmement, on peut percevoir dans les trois dernières questions des difficultés liées à la mécanique de la démonstration ; plus précisément, dans la reconnaissance de ce qu'on accepte ou non comme valide avant de commencer. Bien que ces questions ne soient pas le résultat d'une expérimentation, elles sont représentatives de celles qui circulent dans les périodes de consultations.

L'autre exemple est le *Théorème de la valeur intermédiaire*[2], qui provoque aussi le questionnement des étudiants sur la nécessité d'avoir un théorème et une démonstration pour « une chose si évidente ». Démontrer ce qui semble évident requiert de la réflexion. Pendant les années 80, les recherches didactiques sur les démonstrations en géométrie semblaient mettre en valeur l'aspect *convaincre*. Mais les preuves ont d'autres rôles fondamentaux, notamment *décider* (de la vérité ou de la fausseté d'une conjecture) et *expliquer*, donner des raisons. Bien sûr, démontrer ce qui semble évident n'est pas relié à convaincre ni à décider. Ce qui est en jeu tient alors à la compréhension et aussi, à la recherche de raisons. À travers la compréhension de ce théorème, à travers son traitement ou celui de l'exercice présenté ci-dessus, sont mis en place les notions de fonction continue, de la droite et de sa continuité, de la complétude de l'ensemble des nombres réels et de la correspondance entre points et nombres. Ce qui est évident — sous certaines interprétations de droite et de courbe — est le fait d'avoir un point où celles-ci se rencontrent. Par contre, on demande aux étudiants de démontrer quelque chose sur les

---

[1] Analyse I, Université de Buenos Aires, Faculté des Sciences Exactes et Naturelles, cours destiné aux étudiants de Sciences Mathématiques, Sciences Physiques et Sciences Chimiques. Ce cours a comme préalable un cours de calcul différentiel.

[2] Le Théorème de la valeur intermédiaire peut s'énoncer comme suit : soit f une fonction continue, définie sur l'intervalle réel $[a, b]$, et telle que les signes de $f(a)$ et $f(b)$ sont différents. Alors il existe une valeur c, $a<c<b$, telle que $f(c)= 0$.

nombres… Quelles sont la portée et les limites d'une validation basée sur la continuité de la droite ou sur une idée intuitive de la complétude, et quels pourraient être leurs impacts sur les conceptualisations des étudiants ?

Ce sont des questions très larges auxquelles nous ne prétendons pas répondre complètement ici. En revanche, nous proposons de chercher quelques éléments de réponse, en nous référant premièrement à l'évolution de l'idée du « continu » dans l'histoire des mathématiques, et à la façon dont se sont établis les liens entre cette notion et la notion moderne de complétude (on peut trouver une analyse historique et épistémologique plus ample dans Bergé et Sessa, 2003). Deuxièmement, nous utiliserons cette analyse historico-épistémologique comme cadre de référence pour poser des questions, d'ordre institutionnel, liées à la validation des affirmations mathématiques.

2. L'ÉVOLUTION DE L'IDÉE DU CONTINU

La première référence au continu que nous avons trouvée se situe dans les *Éléments* d'Euclide (3^{e} siècle avant J.-C.). Par exemple, dans la proposition 1 du livre 1, Euclide explicite et justifie minutieusement chaque pas de la construction d'un triangle équilatéral en utilisant les définitions, les postulats et les notions communes qui précèdent la proposition, *sauf l'existence d'un point commun aux deux cercles* tracés avec le compas. On remarque qu'il s'agit là de quelque chose de plus que la simple omission d'une justification : l'existence de ce point d'intersection n'aurait pu être justifiée sur la base de ce qui précède cette construction dans les *Éléments*. Pour pouvoir démontrer l'existence d'un point d'intersection, on aurait besoin d'un postulat de continuité de la droite. Il y a d'autres cas, par exemple, les propositions 12 et 22 du livre 1, où Euclide utilise le point d'intersection entre deux cercles ou le point d'intersection entre une droite et un cercle. Pourquoi Euclide tient-il pour acquise l'existence des points d'intersection, sans recourir à un postulat qui la justifie ? C'est un fait remarquable, déjà signalé et interprété avec des nuances différentes pour ceux qui ont étudié Euclide. Cette propriété, peut-être liée à une image mentale de la droite ou à ses formes de représentation, a été implicitement considérée par Euclide comme une propriété de la droite. Vingt-deux siècles plus tard, c'est en se questionnant sur le statut à donner à cette propriété, sur son caractère naturel ou non, qu'on a envisagé la complétude du système numérique comme un problème à étudier.

Chez les Grecs, le fait de ne pas exprimer numériquement les rapports entre grandeurs incommensurables a résulté en une certaine tension entre le développement de l'algèbre et le développement de la géométrie. L'utilisation des nombres était circonscrite à l'algèbre, et toujours liée aux phénomènes discrets, alors que la géométrie s'occupait des grandeurs continues. La géométrie est donc devenue le domaine naturel de validation du travail avec des grandeurs continues, et cela en y occupant une place très importante. Compte tenu qu'une grande partie des développements mathématiques occidentaux a suivi la tradition des grecs, on comprend le rôle protagoniste joué par la géométrie dans certaines productions mathématiques arabes et européennes. De plus, cela a continué jusqu'aux 17^{e} et 18^{e} siècles. Au début du 19^{e} siècle, on a commencé à douter de la rigueur des arguments basés sur des représentations géométriques.

Plusieurs siècles après Euclide, on peut trouver un autre exemple d'utilisation implicite de la notion de complétude dans les études que G. Cardano (16^e siècle) et postérieurement Bombelli (aussi du 16^e siècle) ont réalisées pour obtenir des solutions aux équations cubiques (Zariski, 1926). Cardano fait intervenir un argument numérique qu'on qualifierait aujourd'hui de précurseur du théorème de la valeur intermédiaire : dans sa résolution de l'équation cubique $x^3+q = px^2$, $p>0$, $q>0$, Cardano postule qu'il y a un certain nombre positif $x = N$ tel que $x^3+q < px^2$ (sous la condition que $q < 4\,p^3/27$; il suffit de prendre $N = 2p/3$). D'autre part, si $x=0$, on a bien que $x^3+q > px^2$, et il y a des valeurs suffisamment grandes de x pour lesquelles $x^3+q > px^2$ (par exemple, $x = p+q$). Cardano en a déduit l'existence de deux racines positives, l'une entre zéro et N et l'autre entre N et quelque valeur suffisamment grande de x. Il semble y avoir une intuition de la complétude du domaine numérique derrière l'assurance qu'existent de telles racines. Pour sa part, Bombelli a examiné les arguments donnés par Cardano et a offert une justification en utilisant des représentations graphiques qui utilisent la continuité du mouvement, une sorte « d'argument dynamique ».

Dans les 17^e et 18^e siècles, le développement du Calcul était lié à des problèmes sur lesquels les mathématiques agissaient comme outil de modélisation. L'existence des nombres cherchés n'était pas un problème qu'on se posait à ce moment-là ; cette existence était déjà donnée par la nature des phénomènes étudiés, par exemple le calcul d'une distance ou d'une hauteur. Pour sa part, I. Newton a considéré explicitement les grandeurs non pas comme constituées de parties arbitrairement petites, mais plutôt comme générées par un mouvement continu : pour lui, les droites et lignes ne résultent pas de l'addition de leurs parties, mais sont plutôt le résultat du mouvement continu d'un point (De Gandt, 1990).

Dans ces passages de l'histoire des mathématiques, on voit qu'au moins jusqu'à la fin du 18^e siècle, la continuité de la droite était implicitement tenue pour acquise. Comme on verra dans ce qui suit, ce statut changera, on pourrait dire, comme l'une des conséquences de la création des géométries non-euclidiennes.

3. LES PREMIÈRES EXPLICITATIONS DE LA COMPLÉTUDE

Le développement des géométries non-euclidiennes a amené à problématiser le rapport entre les mathématiques et la réalité, et cela a suscité plusieurs mathématiciens du 19^e siècle à se questionner sur la portée de la géométrie comme modèle de l'espace physique. Une sorte de méfiance s'est installée quant au rôle important joué par la géométrie jusqu'alors. Les arguments basés sur les représentations graphiques ont été implacablement remis en question. Les mathématiciens ont alors été amenés à rechercher une reconstruction de l'Analyse, exclusivement basée sur des concepts arithmétiques. Par rapport à l'ensemble des nombres réels, quelques propriétés qui le caractérisent lui étaient attribuées naturellement et étaient considérées explicitement sans une discussion sur leur validité, comme nous l'illustrerons dans les deux prochains exemples.

3.1. Premier exemple : Une condition suffisante pour la convergence des suites numériques et séries

B. Bolzano (début du 19e siècle) a affirmé que la convergence des suites numériques est assurée si la distance entre ses termes est aussi petite que désirée à partir d'un certain rang (Jarnik, 1981). L'existence de la limite des suites vérifiant cette propriété — de telles suites sont aujourd'hui nommées *suites de Cauchy* ou *suites fondamentales* — est absolument indispensable si l'on veut faire de l'Analyse, mais elle ne pouvait pas être démontrée en utilisant seulement les propriétés des nombres connues à ce moment-là. Cauchy a pour sa part, dans son *Cours d'Analyse*, énoncé une affirmation analogue, en admettant sans discussion l'existence de la limite d'une suite vérifiant la propriété ci-dessus.

3.2. Deuxième exemple : Le théorème de la valeur intermédiaire

Cauchy énonce ce théorème et en donne deux démonstrations dans son livre. Vis-à-vis de nos connaissances actuelles, les deux sont basées sur ce qu'on peut percevoir dans les représentations graphiques. Les deux extraits suivants donnent une idée du type d'arguments qui y sont invoqués. Les caractères gras ont été rajoutés par nous.

> *Pour établir la proposition précédente, il suffit de* ***faire voir*** *que la courbe qui a pour équation* $y = f(x)$ *rencontrera une ou plusieurs fois la droite qui a pour équation* $y = b$ *dans l'intervalle compris entre les ordonnées qui correspondent aux abscisses* x_0 *et* X *; or c'est* ***évidemment*** *ce qui aura lieu dans l'hypothèse admise* [à savoir que f est continue dans l'intervalle $[x_0, X]$ et $f(x_0) < b < f(X)$] (Cauchy, 1897, p. 50).

> *La droite* [d'équation $y = b$] *passera* ***nécessairement*** *entre ces deux points,* [les points $(x_0, f(x_0))$ et $(X, f(X))$] *ce qu'****elle ne peut faire sans rencontrer dans l'intervalle la courbe*** *ci-dessus mentionnée* (idem, p. 51).

Cauchy avance ces arguments même s'il avait déjà exprimé dans l'introduction de son livre son intention de prendre ses distances vis-a-vis des démonstrations basées sur les représentations géométriques. Probablement a-t-il été ainsi amené à considérer une autre démonstration. L'autre démonstration fait usage de l'existence d'un élément d'intersection d'une suite d'intervalles emboîtés, condition qui ne peut pas non plus être démontrée en utilisant seulement les propriétés arithmétiques déjà connues des nombres. Plus précisément, cette existence est une autre façon (équivalente) de caractériser la complétude. Pour sa part, Bolzano a énoncé le même théorème et pour le démontrer, il utilise l'existence de la plus grande borne inférieure d'un ensemble borné inférieurement ; existence qui, dans sa démonstration, dépend de l'existence de la limite d'une suite fondamentale. C'est apparemment la première fois que la plus grande borne inférieure (ou infimum) est considérée explicitement.

Nous pouvons constater qu'à ce moment-là, il y avait une sorte de circularité dans les argumentations : des énoncés s'appuyaient sur d'autres qui s'appuyaient sur d'autres et ainsi de suite, lesquels ne pouvaient pas être démontrés sur la seule base des propriétés arithmétiques déjà connues. On pourrait dire que durant cette période (première moitié du 19e siècle), la complétude était présentée explicitement sous des formes différentes telles que la convergence des suites numériques fondamentales, l'existence d'intersection des intervalles emboîtés ou l'existence de la plus grande borne inférieure d'ensembles inférieurement bornés. Mais, aucune de ces propriétés ne pouvaient être démontrés, à cause de l'inexistence d'un système numérique adéquat.

Ce qui changera dans la deuxième moitié du 19^{e} siècle est le fait que des mathématiciens, tels que Dedekind et Cantor, ont reconnu que ces propriétés étaient naturellement attribuées au système numérique. Ils ont construit un système numérique utilisant les nombres rationnels comme base, et pour lequel il est possible de démontrer ces propriétés. D'un point de vue didactique il nous semble intéressant de comprendre d'où provient cette *reconnaissance*

4. UN ENSEMBLE ORDONNÉ ET COMPLET

4.1. Les chemins pour la construction d'un ensemble tel que la propriété de complétude soit démontrable

Sans entrer dans les détails de ces constructions, nous voudrions remarquer que les mathématiciens qui ont créé ces constructions de l'ensemble des nombres réels tel qu'il est utilisé en analyse, ont le grand mérite d'avoir pris conscience de la nécessité de formuler explicitement la propriété de complétude du système numérique. Cette formulation, à notre avis, est sans aucun doute reliée aux besoins de rigueur impliquée dans la communication aux autres. Dedekind a exprimé très clairement dans son travail les raisons pour lesquelles il a construit l'ensemble des nombres réels comme il le fait : dans les cours de Calcul, il ne pouvait pas démontrer qu'une suite monotone et bornée a une limite, sans en appeler à la continuité de la droite. De plus, ajoute-t-il, cette idée de continuité de la droite n'avait jamais été clairement exprimée jusqu'alors. Il a utilisé les coupures pour exprimer ce qu'il interprétait comme la continuité de la droite, et il a bâti un système numérique basé sur les rationnels, de façon à donner aux nombres une propriété analogue à celle des points de la droite. Dans ce nouveau système, il est possible de *démontrer* les propriétés qui étaient considérées auparavant comme naturellement vérifiées (Dedekind, 1978). On peut dire que l'intérêt de Dedekind était de fournir des fondements. Cantor, pour sa part, a construit formellement un système numérique qui inclut les nombres rationnels et tel que toute suite fondamentale y a une limite. Cantor a eu besoin de bâtir l'ensemble pour être en mesure de démontrer l'unicité des coefficients des développements des fonctions en séries trigonométriques. Cantor avait besoin d'avoir un système numérique bien défini pour pouvoir démontrer d'autres théorèmes de l'Analyse. Dans ce système, il est aussi possible de démontrer les propriétés énoncées en 3.2 (Cantor, 1871).

Dans cette période la complétude est explicitement incorporée, non plus comme une propriété qui se vérifie naturellement, mais comme une *condition nécessaire* pour la conception d'un système numérique apte à valider les propriétés de l'Analyse.

4.2. La complétude comme un axiome

Quelques années plus tard, au debout du 20e siècle, D. Hilbert présente deux systèmes axiomatiques, l'un pour la géométrie, l'autre pour l'ensemble des nombres réels. Dans les deux, il présente des axiomes de continuité lesquels, pour l'ensemble des nombres réels, prennent le nom d'*axiomes de complétude* (Hilbert, 1899). Ces axiomes sont un peu différents de ceux qu'on peut voir dans les textes actuels. Les constructions de Cantor et de Dedekind jouent un nouveau rôle dans le cadre d'une telle axiomatique : elles peuvent être utilisées comme modèles pour démontrer la consistance de ce groupe d'axiomes.

Si nous pensons à la communication du savoir, la méthode axiomatique acquiert un rôle qui a beaucoup de valeur, en autant que ce savoir qu'on axiomatise soit un savoir déjà produit, conformé par des objets, des propriétés et des relations entre ces objets. Ils sont réorganisés axiomatiquement avec l'objectif de les présenter. Hilbert a ajouté à la fin de sa présentation axiomatique qu'on reconnaît la concordance des axiomes avec le système « déjà connu » des nombres réels (Hilbert, 1899). Nous discuterons de l'importance des mots *déjà connu* dans la prochaine section.

5. QUELQUES RÉFLEXIONS LIÉES À LA VALIDATION AUTOUR DE LA NOTION DE COMPLÉTUDE

Dans les quelques réflexions qui vont suivre, nous tenterons si possible de poser un regard plus général, en cherchant à l'étendre au-delà du seul cas de l'ensemble des nombres réels.

Nous pouvons dire que les éléments et les arguments qu'on considère suffisants pour valider le travail ont un caractère « variable ». Évidemment, ce n'est pas quelque chose de nouveau, mais c'est particulièrement clair dans le cas du sujet précédemment abordé. Alors que pour Cardano et Bombelli, les représentations graphiques constituaient un cadre de validité suffisamment solide, la construction de Dedekind a son origine dans le fait que les arguments basés sur des représentations graphiques étaient vus comme insuffisants à son époque. Pour sa part, la présentation axiomatique est vue comme la plus adéquate, selon les exigences de validation du 20e siècle. On pourrait dire que seulement sous certaines valeurs de la « variable validité », il a été possible de problématiser l'existence de certains nombres — extremums ou limites — et en conséquence, de faire face au problème de la complétude.

Nous avons vu que la même affirmation mathématique change son statut par rapport à des projets différents. Dans le cas de la complétude, la rigueur et la précision des définitions pour la communication aux autres sont au cœur de ces changements. Par exemple, jusqu'au début du 19e siècle, sans être explicitement énoncée, la propriété de complétude avait un caractère instrumental. Cauchy, Bolzano et ses contemporains ont utilisé explicitement quelques énoncés qui (nous le savons maintenant) sont mathématiquement équivalents à la propriété de complétude, même si la complétude n'était pas à ce moment-là un objet mathématique défini. C'est à la fin du 19e siècle que la complétude est vue comme un attribut qu'on doit expliciter pour développer un travail mathématique rigoureux. Finalement, elle obtient le caractère d'axiome quand l'objectif devient de définir formellement l'ensemble $\mathbb{R}$.

La synthèse historique présentée montre toutes les questions et dédales parcourus dans la configuration du système numérique réel, auxquels la présentation axiomatique ne permet pas d'accéder. Le choix d'une présentation axiomatique dans l'enseignement universitaire des cours de calcul ou d'analyse répond sans doute au besoin d'avoir des énoncés clairs, qui serviront comme base au travail mathématique. Et bien sûr, une présentation constructive ne serait pas adéquate pour initier les études du calcul et de l'analyse. Le problème que nous identifions, quant à la présentation axiomatique de $\mathbb{R}$ dans l'enseignement, se pose quand elle est placée au début. Si par contre, une partie de la théorie est présentée (par exemple quelques théorèmes, quelques résultats) et qu'on présente ensuite les axiomes comme les points de départ nécessaires pour valider cet ensemble de théorèmes, le rôle de l'axiome dans la théorie sera probablement bien mieux compris, et aussi le rôle de la présentation axiomatique dans les mathématiques. C'est dans ce dernier sens que nous récupérons les mots de Hilbert « système numérique déjà connu ».

Cette analyse historique et épistémologique montre que la compréhension de la complétude comme une propriété ou un axiome qui répond à un véritable problème, exige de se situer dans une perspective qui n'est pas forcément la plus naturelle, et qui en tout état de cause n'a certainement pas été « première » historiquement.

6. DE NOUVELLES QUESTIONS

Après avoir parcouru ce panorama, on a un cadre de référence pour se poser quelques questions au niveau institutionnel. Dans une optique institutionnelle, on peut se demander, pour une institution donnée : quel est le statut de la propriété de complétude dans les différents moments de la formation des étudiants ? Cela veut dire, dans les différents cours : est-elle prise naturellement de manière implicite ? Y a-t-il des explicitations, même s'il n'y a pas justification formelle ? Est-elle est définie axiomatiquement ? Dans le cas affirmatif, sous quelle(s) forme(s) ? Jusqu'où les étudiants et les enseignants peuvent-ils avancer et approfondir le travail mathématique sans expliciter la notion de complétude ? Sous quelles conditions serait nécessaire (du coté des étudiants) l'appropriation de la propriété de complétude ? Les différentes constructions, notamment celles de Cantor et Dedekind, sont-elles présentées ? Dans le cas affirmatif, leur rôle est-il celui d'un modèle ? Il y a une partie des études qui se réalise avec la droite comme support, sans expliciter en quoi consiste sa continuité. Quel est le rôle des formes de représentation dans la résolution des exercices que les étudiants doivent faire ? Quels sont les requêtes de validation et quels éléments ont les étudiants pour valider leurs résultats ?

Ces questions, qui nous semblent fertiles pour regarder le système d'enseignement, n'auraient pu être formulées sans le cadre de référence de l'analyse historique déjà présentée. On trouvera une étude institutionnelle qui comprend l'analyse de ces questions mais aussi d'autres, dans Bergé (2004). Dans la section suivante, nous nous penchons sur un épisode ponctuel du cours Analyse I : la présentation de la complétude de $\mathbb{R}$.

7. UN REGARD SUR LE SYSTÈME

Nous allons inclure une brève description de la première semaine du cours Analyse I. Le premier cours, de deux heures, a démarré avec trois définitions :

1) borne supérieure d'un sous-ensemble des réels ;
2) élément maximal d'un sous-ensemble des réels ;
3) supremum d'un sous-ensemble des réels borné supérieurement.

Le professeur a démontré que si le supremum existe, alors il est unique, et il a énoncé l'axiome du supremum : tout ensemble réel non vide borné supérieurement admet un supremum. Aussi, le professeur a défini les notions de borne inférieure, d'infimum, et le premier théorème a été énoncé et démontré en utilisant l'axiome du supremum : *tout ensemble inférieurement borné admet un infimum.* Tout de suite, le professeur a défini ce que sont les suites, a donné la définition de la limite d'une suite, a défini ce que sont les suites croissantes, les suite bornées et a démontré (en utilisant l'axiome du supremum) que toute suite croissante et supérieurement bornée converge au supremum. Au deuxième cours, lui aussi de deux heures, le professeur a défini les intervalles réels ouverts, la clôture d'un sous-ensemble des réels, les ensembles fermés, et il a démontré que pour chaque élément de la clôture d'un ensemble, il existe une suite incluse dans l'ensemble qui converge à cet élément. Le professeur a défini la limite d'une fonction et la continuité d'une fonction en utilisant des suites. Tel que nous l'avons dit, ce cours a comme préalable un cours de calcul différentiel, où les étudiants ont essentiellement fait des calculs sans que leur soit exposée une approche théorique.

Nous voyons que dans ce cours, l'approche est axiomatique. La présentation de l'axiome du supremum va de soi ; elle n'est pas introduite ni précédée par une question, pas plus que les définitions. Face aux contraintes du système, il ne semblerait pas être possible de procéder à une genèse artificielle, cela est donc remplacé par une approche axiomatique, impeccable du point de vue de la logique mathématique.

8. POUR FINALISER : UNE SORTE D'EXPLICATION

Si nous revenons à l'exercice proposé comme exemple en introduction à la présente communication, nous comprenons que, peut être, l'intention de présenter un tel exercice est précisément d'obtenir de la part des étudiants une attitude de rigueur mathématique. Justement, les étudiants n'ont aucun doute sur la validité de cet énoncé. Le doute ne serait pas la raison pour laquelle ils auraient à s'engager dans cette démonstration. Nous pensons que cet exercice est présenté là selon l'objectif que les étudiants puissent « dénaturaliser » quelque chose de très naturel, quelque chose de parfaitement évident dans le registre graphique. Nous nous demandons si cet objectif peut s'obtenir par la seule présentation de l'exercice, compte tenu du type d'approche que le cours même adopte. Ce cours présente le passage direct à l'axiome du supremum, en évitant les questions qui lui ont donné du sens. Ces questions, précisément, sont semblables à celles qui donneraient du sens à un exercice comme celui posé ici. De ce point de vue, le fait que les étudiants questionnent la légitimité de cette tâche est quelque chose à quoi on peut s'attendre, qu'on aurait pu quasiment prédire à coup sûr.

Enfin, dans le registre graphique, la complétude est non problématique et semble évidente. Pour comprendre cette propriété comme la réponse à un problème, il faut, à notre avis, être dans une problématique de validation et s'être formulé quelques questions. Ces questions, comme nous l'avons suggéré, ne surgissent pas des seules résolutions d'exercices. Face à l'absence de telles questions, les étudiants ne comprennent pas pourquoi et dans quel but il est nécessaire de se débattre avec ces démonstrations et propriétés, sur des énoncés, répétons-le, déjà connus d'eux. Les étudiants ne se posent pas spontanément ces questions, qu'il n'est pas, d'autre part, naturel de se poser. En ce sens, l'institution a une position privilégiée qui n'est pas exploitée à son plein potentiel.

BIBLIOGRAPHIE

ARTIGUE, M. (1998). L'évolution des problématiques en didactique de l'Analyse. *Recherches en didactique des Mathématiques*, Vol. 18, n°2, pp. 231-262.

BERGÉ, A. (2004). *Un estudio de la evolución del pensamiento matemático : el ejemplo de la conceptualización del conjunto de los números reales y de la noción de completitud en la enseñanza universitaria*. Thèse doctorale, Universidad de Buenos Aires, Argentine. Disponible sur le site d'adresse http://etd.bl.fcen.uba.ar/tede2/tde_busca/tde.php?id=7&id2=14&id3=1

BERGÉ, A. & SESSA, C. (2003). Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. *Revista Latinoamericana en Matemática Educativa,* 6/3, pp. 163-197.

CANTOR, G. (1871). Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. *Mathematische Annalen* V, pp. 123-132. Version francaise : Acta Mathematica 2, pp. 336-348.

CAUCHY, A. L. (1897). Œuvres Complètes d'Augustin Cauchy. II^{e} Série – Tome III. Gauthier-Villars, Paris.

DEDEKIND, J. W. R. (1978). *La continuidad y los números irracionales*. Version en espagnol de l'original *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872). Communication interne n° 61, éditée par le Département de Mathématiques de la Faculté des Sciencias de la UNAM, México.

DE GANDT, F. (1990). El estilo matemático de los Principia de Newton. *Mathesis*, Vol 6, n° 2, pp. 163-189.

EUCLIDE. *The thirteen Books of Euclid's Elements with introduction and commentary by Sir Thomas Heath*. Dover, New York. (Réplique de la deuxième édition).

HILBERT, D. (1899). Über den Zahlbegriff. *Jahres der Deut. Math-Verein* 8, pp. 180-184.

JARNÍK, V. (1981). Bolzano and the foundations of mathematical analysis. In *On the occasion of the bicentennial of Bernhard Bolzano.* Society of czechoslovak mathematicians and physicists, éds.

ZARISKI, O. (1926). *Essenza e significato dei numeri. Continuitá e numeri irrazionali.* Casa Editrice Alberto Stock, Rome.

aberge@mathstat.concordia.ca

Département de mathématiques et de statistiques
Université Concordia

L'argumentation, la preuve et la démonstration dans la construction des mathématiques : des entités conflictuelles ? une lettre de Godefroy Guillaume Leibnitz à Chrétien Wolf (1713)

FERNANDO HITT

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL et CINVESTAV

RÉSUMÉ. Bien que l'argumentation et la démonstration en mathématiques soient étudiées depuis longtemps, on assiste ces dernières années à un regain d'intérêt pour le sujet. Duval (1992-1993) a soulevé la question de la « distance cognitive » qui peut exister entre certains types d'argumentations et de démonstrations. Plus précisément, Duval (Idem) a fait une analyse de la pertinence qu'il y a à se questionner sur la continuité ou la rupture cognitive entre argumentation, démonstration et explication. Balacheff (1999) considère que du point de vue de l'apprentissage, il ne faut être ni en faveur de la continuité, ni en faveur de la rupture cognitive entre argumentation et démonstration, mais qu'il faut plutôt considérer l'argumentation comme un obstacle épistémologique à l'apprentissage de la démonstration et plus généralement, de la preuve en mathématiques. Pour sa part, Tutescu (2003) considère que l'argumentation, qui se base sur une logique « quotidienne » et le langage naturel, est très éloignée de la démonstration puisque celle-ci se base sur une logique rigoureuse et un langage formel. Notre position serait plutôt que l'argumentation ne peut pas se distinguer facilement de la preuve et de la démonstration dans une situation de construction des concepts mathématiques, qu'il existe une dialectique entre ces aspects et que la distance cognitive peut être si ténue qu'elle ne peut être décelée. Cette impossibilité de distinguer l'argumentation, la preuve et la démonstration par les acteurs de la situation peut être la source d'un obstacle épistémologique. Sous cet angle, nous voulons analyser la correspondance que se sont échangés Leibnitz[1] et Wolf (Leibnitz, 1713), et dégager la difficulté qu'il y a à se prononcer en faveur de l'une ou l'autre lorsqu'on se place dans un processus heuristique de construction des mathématiques. En d'autres mots, dans une mathématique non achevée, il n'est pas possible de faire une distinction tranchante entre argumentation, preuve et démonstration puisqu'il existe un « mélange naturel » qui produit des démarches heuristiques, nécessaires à la construction des connaissances mais en même temps, à l'origine d'obstacles épistémologiques.

1. INTRODUCTION

1.1. L'argumentation et la démonstration face à face !

La problématique de l'apprentissage de la démonstration et plus généralement, de la preuve en mathématiques est toujours vivante[2]. Des chercheurs de différentes disciplines, pour des raisons diverses, se sont penchés sur la démonstration en mathématiques (philosophes, mathématiciens, historiens et didacticiens des mathématiques, etc.).

---

[1] Nous adoptons partout dans le présent texte l'orthographe francisée du nom *Leibniz*, conformément à la source ici utilisée (cf. Bibliographie).

[2] Voir par exemple : http://www.lettredelapreuve.it/

Les études sur le rôle de l'argumentation[3] et de la démonstration ont montré que l'argumentation a comme but la possibilité de convaincre quelqu'un et que la démonstration cherche plutôt la vérité d'une proposition. Cette conclusion a été signalée par Grize et Piérault (1983, p. 7) :

> *La mathématique et le discours quotidien, par exemple, sont des domaines d'activité rationnelle qui ont chacun leur cohérence propre. Si la pensée logico-mathématique procède en dernière analyse par enchaînement de valeurs de vérité, il en va tout autrement de la pensée naïve et quotidienne. Non d'ailleurs qu'elle manque de rationalité. Elle use aussi de règles de cohérence et d'enchaînement, mais elle se soucie moins d'atteindre la vérité que l'efficacité.* […] *Si l'on connaît depuis longtemps ce qui fait une démonstration correcte, on ne sait pas encore ce qui fait une « bonne » argumentation.*

Ces auteurs signalent un point important des caractéristiques de l'argumentation et de la démonstration. Leur analyse porte, d'une part, sur les caractéristiques du discours quotidien et d'autre part, sur la démonstration d'un point de vue formel. Est-ce que cette position marque l'existence de deux mondes sans liaisons entre eux ? Quelle position devons-nous prendre en compte dans l'apprentissage de la mathématique ?

Duval (1992-93) a soulevé la question dans son article controversé « Argumenter, démontrer, expliquer : Continuité ou rupture cognitive ? », où il se place du côté de Grize et Piérault, mais du point de vue de l'apprentissage des mathématiques :

> *Le développement de l'argumentation même dans ses formes les plus élaborées n'ouvre pas une voie vers la démonstration. Un apprentissage spécifique et indépendant est nécessaire en ce qui concerne le raisonnement déductif* (Duval, 1992-93, p. 60).

Cette position a été réfutée par Balacheff qui affirme que, pour l'apprentissage, on ne doit se placer ni en faveur de la continuité, ni de la rupture cognitive entre argumentation et démonstration. Il considère plutôt que l'argumentation est constitutive d'un obstacle épistémologique pour l'apprentissage de la démonstration et, plus généralement, de la preuve en mathématiques. Balacheff (1999) signale que :

> *L'examen des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans cette approche centrée sur l'analyse du discours me paraît conforter la conjecture d'un rapport conflictuel entre les deux genres lorsque l'on se place dans une perspective d'apprentissage des mathématiques. Raymond Duval* […] *conclut que la démonstration relève d'un apprentissage « spécifique et indépendant ».* […] *L'argumentation est à la conjecture ce que la démonstration est au théorème.* […] *Dans une perspective d'apprentissage,* [… il faut] *reconnaître l'existence d'une relation complexe et constitutive du sens de chacune : l'argumentation se constitue en un obstacle épistémologique à l'apprentissage de la démonstration, et plus généralement de la preuve en mathématique.*

Balacheff (1999) a invité les chercheurs à débattre de la question sans préciser son affirmation. Bien qu'on ne peut qu'être d'accord avec le fait que « l'argumentation est à la

[3] Une argumentation est composée d'une conclusion et d'un ou plusieurs « éléments de preuve », qu'on appelle des prémisses ou des arguments, et qui constituent des raisons d'accepter cette conclusion. L'argumentation désigne également l'échange discursif effectif par lequel des interlocuteurs tentent de défendre une position ou de faire accepter un point de vue. Plus largement, l'argumentation est un champ d'études à la fois descriptif et critique qui s'intéresse à la mise en forme des arguments (oralement ou par écrit) en vue, notamment, de la persuasion d'un auditoire. (L'encyclopédie Wikipedia).

conjecture ce que la démonstration est au théorème », la critique immédiate qu'on peut faire est que, si les élèves arrivent à une conjecture sans avoir ressenti le besoin de démontrer, ils vont rester dans un monde différent du monde de la démonstration ; ce qui est précisément l'opinion des auteurs précédents ! Pourquoi devons-nous considérer l'argumentation comme constitutive d'un obstacle épistémologique ? D'autre part, si l'on veut convaincre de la pertinence de la notion d'obstacle épistémologique, il faut faire valoir la construction de connaissance qui s'oppose à une autre connaissance, dans le sens de Bachelard (1938). Et si nous prenons comme paradigme cette notion, que devons-nous faire dans l'enseignement ?

L'approche de Grize et Piérault (1983) ainsi que de Duval (1992-93), semble avoir plus influencé les chercheurs que celle de Balacheff (1999). Nous pouvons constater que la position de ceux-là a été reprise par d'autres chercheurs et ce, dans différents domaines ; par exemple, en philosophie, Tutescu (2003, p. 68) écrit :

> *Néanmoins, il faut distinguer, dès le début, le propre de l'argumentation du propre de la démonstration. La distinction démonstration vs argumentation se ramène à la distinction plus générale langage(s) artificiel(s) vs langage naturel, ou, à celle plus précise raisonnement vs logique naturelle.*

Et en didactique des mathématiques, par exemple, Tanguay (2005, p. 62) signale :

> *Mes hypothèses sont les suivantes :*
> a) *L'apprentissage de la démonstration est un processus de longue haleine, qui doit débuter tôt.* […] *Il faut chercher à faire comprendre aux élèves aussitôt que possible les* règles du jeu.
> b) *Il faut briser ces cercles vicieux qui tiennent l'élève captif. Celui du rapport de la démonstration à l'intuition* […]. *Celui de la prise de conscience de la valeur épistémique théorique et du statut opératoire variable des propositions : comment la faire naître si l'élève n'arrive pas à se décentrer des contenus et valeurs de vérité ? Celui de l'apprentissage de la structure hiérarchisée, globalement et localement, de la démonstration.*
> c) *J'avance pour finir l'hypothèse qu'un travail (sur l'organisation des propositions dans le graphe) fait en équipes, avec ce que cela suppose comme échanges argumentatifs, favorisera une adhésion intuitive aux mécanismes logiques de la démonstration.*

En suivant l'argumentation de ces auteurs, il nous semble que leur position est que la distance cognitive est grande entre argumentation et démonstration ; et qu'on devrait, en didactique des mathématiques, mettre plus d'emphase sur l'importance du raisonnement déductif, dans sa spécificité et son indépendance de l'argumentation.

1.2. Quelle est la place de la preuve face à l'argumentation et la démonstration ?

En suivant le travail de Duchet (2001), nous allons prendre en compte la distinction faite par cet auteur entre preuve et démonstration.

> *Un* théorème *est un texte mathématique M qui se présente sous la forme suivante :*
>
> > *D'après L (règles logiques), dans T (théorie mathématique), si H (ensemble des hypothèses du théorème), alors C (conclusion du théorème)*
>
> *et pour lequel il existe une démonstration mathématique.*

Une démonstration mathématique *du théorème M est une succession d'énoncés dont le dernier est la conclusion C de M et tels que chacun d'eux est :*

- *soit un axiome ou un théorème de T,*
- *soit une hypothèse de H,*
- *soit une conséquence logique (au sens de L) d'autres énoncés, apparus plus tôt dans la démonstration.*

Une preuve mathématique *est un discours qui, à propos d'un énoncé précis, convainc une communauté mathématique de l'existence d'une démonstration complète de cet énoncé. (On donne aussi le nom de* preuve *à l'activité de production d'une telle preuve mathématique.)*

Mais alors, si la preuve mathématique est un discours, un tel discours se situe quelque part entre l'argumentation et la démonstration.

2. LE PRINCIPE DU TIERS EXCLU : UNE NECESSITÉ DANS LA CONSTRUCTION DES MATHÉMATIQUES

2.1. Le principe du tiers exclu[4]

Dans Hitt (2004), nous avons fait une analyse historique de la naissance du principe du tiers exclu et de la démonstration. Ici, nous voulons seulement signaler que dans la philosophie et dans la mathématique grecque (V^e siècle avant J.-C.), le principe du tiers exclu a souvent été utilisé ; par exemple, au III^e siècle avant J. C., les *Éléments* d'Euclide ont été écrits selon ce principe. Le principe du tiers exclu, dit en forme simple, est qu'étant donné un énoncé mathématique, celui-ci est vrai ou faux, il n'y a pas de troisième option ! Dans ce cadre, une démonstration fonctionne à l'intérieur d'un système formel où l'énoncé est VRAI ou FAUX. Par contre, en argumentation, qui s'appuie sur la logique naturelle, nous n'avons pas à strictement parler ce type de logique ; en fait, nous n'y avons pas le principe du tiers exclu. Heureusement qu'il y a une logique différente dans la langue naturelle sinon, la communication entre les humains deviendrait presque impossible. Et c'est de ce point de vue que nous devons analyser la dialectique entre l'argumentation et la preuve.

Les différents auteurs cités plus haut sont des experts et peuvent dégager sans difficulté, dans une situation donnée, ce qui tient de l'argumentation ou de la démonstration. Par exemple, si nous analysons les démarches des étudiants (étudiants en formation des maîtres ou élèves au secondaire, par ex.) du point de vue de l'expert, nous sommes amenés à dire que les arguments avancés par les étudiants sont très éloignés d'une démonstration mathématique. Voici quelques exemples d'arguments éloignés d'une démonstration :

---

[4] Le *Principe du tiers exclu* affirme que si R est une proposition logique, alors la proposition « R ou (non R) » est vraie. Cela signifie qu'une relation ne peut être que vraie ou fausse, et qu'il n'y a pas de troisième état. Une autre façon de le formuler en logique classique est : non (non R) = R. Pour Aristote le principe du tiers exclu est une conséquence du *principe de non contradiction* et de la « définition logique de la vérité ».
Le principe de non contradiction dit que pour toute proposition R, la proposition « R et (non R) » est fausse. En logique *classique*, où non (non R) = R, ce principe est équivalent à celui du tiers exclu :
non contradiction : non (R et (non(R)) $\Leftrightarrow$ non(R) ou non(non(R)) $\Leftrightarrow$ non(R) ou R $\Leftrightarrow$ R ou non(R) (tiers exclus). (L'encyclopédie Wikipedia : http://fr.wikipedia.org/wiki/Principe_du_tiers_exclu).

e) $1-1+1-1+1-1+1-1+\dots$

Si on regarde cette somme de façon où on
ajoute toujours $(1-1)=0$. Alors cette somme
détermine le nombre 0.
En effet, on ajoute toujours rien (0).
Mais si ça se termine par +1, le nombre est 1.

*****

e) $1-1+1-1+1-1+\dots$
NON car si le dernier chiffre est +1, la
somme sera égale à 1 et si le dernier
chiffre de la somme est -1, la somme
sera égale à 0

*****

e) $\underbrace{1-1+1-1+1-1+1-1\dots\dots}_{\text{infinité de fois}}$

= 0 si le nombre de fois est pair
= 1 si le nombre de fois est impair

indéterminé sur ∞ ← réponse

Mais, que voulons nous dire quand nous disons que les arguments des étudiants sont loin d'une démonstration ? Voulons nous dire que l'enseignement doit mettre l'emphase sur les règles formelles de la démonstration ?

2.2. Une preuve rigoureuse, c'est quoi ?

Nous voulons discuter le point de vue d'un mathématicien qui s'intéresse à l'enseignement des mathématiques et qui discute sur la preuve rigoureuse (la démonstration) en mathématiques. Perrin (1997, p. 2), premièrement, parle de la pertinence de la rigueur en mathématiques :

> […] *Or la rigueur en mathématiques est indispensable pour une raison toute simple : elle seule permet d'être sûr des résultats établis. Il y a beaucoup d'exemples historiques qui montrent que, sans cette rigueur, on peut aboutir à n'importe quoi.* […] *Il n'est pas si simple de définir ce qu'est une démonstration rigoureuse et d'être assuré qu'une preuve l'est effectivement, et ce, même aujourd'hui où les formalismes sont assez bien établis.*

Perrin présente un exemple qui nous conduit à douter de l'affirmation de Grize et Piérault (1983, p. 7), cités plus haut : « Si l'on connaît depuis longtemps ce qui fait une démonstration correcte, on ne sait pas encore ce qui fait une 'bonne' argumentation. » Voici l'exemple :

> *Pour l'anecdote je citerai une expérience personnelle récente : nous avions cru prouver qu'un certain objet (le schéma de Hilbert $H_{d,g}$ des courbes de degré d et genre g) n'était "presque" jamais connexe. La démonstration était écrite, soumise à une revue prestigieuse, contrôlée par un rapporteur, acceptée sans problème !*
> *Pourtant, en faisant des calculs (assez compliqués) sur un exemple précis nous avons trouvé un contre-exemple. Il nous a fallu quelques jours pour admettre notre erreur et quelque temps encore pour comprendre où était la faute dans la démonstration* (Perrin, 1997, p. 4).

Perrin propose alors une réflexion qui nous semble importante au sujet de la question : quand est-on vraiment sûr qu'un résultat est correct ?

> *Je propose ici deux éléments de réponse (issus de mon expérience de chercheur).*
> *Le premier est empirique et psychologique : à force de voir fonctionner ce résultat dans des dizaines d'exemples différents, de situations distinctes, on finit par être vraiment, intimement, convaincu de son exactitude.*
> *Le second est plus sérieux : un résultat est définitivement établi lorsque l'on a suffisamment progressé (soi-même ou la communauté) pour qu'il devienne "trivial", c'est-à-dire soit revu, en général par d'autres voies, plus simples ou plus conceptuelles, de manière totalement convaincante* (Perrin, 1997, p. 4).

Nous pensons que cette approche est similaire à celle de Duchet et qu'en fait, une telle position est devenue très répandue ; que la preuve mathématique[5] est un élément important à considérer dans la classe de mathématiques, comme prélude à la démonstration mathématique.

3. UN RÉSULTAT EST DÉFINITIVEMENT ÉTABLI LORSQU'ON A SUFFISAMMENT PROGRESSÉ (SOI-MÊME OU LA COMMUNAUTÉ) POUR QU'IL DEVIENNE « TRIVIAL » : LETTRE DE LEIBNITZ À WOLF

Avant de commencer notre analyse sur la lettre de Leibnitz à Wolf (Leibnitz, 1713, pp. 66-70), nous voulons faire une remarque importante. Les différents personnages que Leibnitz mentionne dans sa lettre sont des mathématiciens qui avaient, comme lui, une connaissance profonde de la démonstration en géométrie. Notre analyse portera sur la construction d'une preuve dans un domaine des mathématiques qui était nouveau à l'époque. Cet exemple peut nous aider à comprendre les problèmes d'apprentissage de la preuve et de la démonstration en mathématiques.

Si nous nous plaçons dans une situation de construction d'un concept mathématique et de débat scientifique, et que nous essayons de comprendre les arguments avancés par un individu, sera-t-il possible de déceler sans difficulté ce qui est propre à l'argumentation et ce qui est propre à la démonstration ?

---

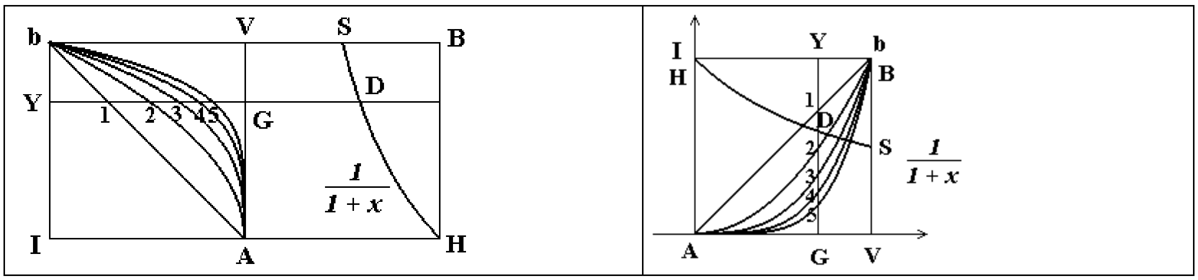
[5] En mathématiques, une *démonstration* est un raisonnement qui permet, à partir de certains axiomes, d'établir qu'une assertion est nécessairement vraie. Les démonstrations utilisent la logique mais incluent habituellement des éléments du langage naturel en évitant autant que possible d'introduire des ambiguïtés.
Dans le contexte de la théorie de la preuve, dans lequel des preuves purement formelles sont considérées, des preuves qui ne sont pas entièrement formelles sont appelées des « preuves sociales ». Ce sont des preuves qui sont basées sur des affirmations considérées comme exactes parce qu'elles sont admises par un ensemble de personnes. L'idée est acceptée comme exacte lorsqu'elle fait consensus. (L'encyclopédie Wikipedia).

Si nous remontions aux années 1700 et si nous pouvions demander à un expert, à un mathématicien de l'époque, d'analyser la production des étudiants citée dans la section 2.1, que répondrait–il ? Sa position serait-elle la même que la nôtre ?

Pour essayer de répondre à ces questions, lisons ce que Leibnitz a répondu à Wolf[6] (1713) au sujet d'un résultat obtenu par Guido Grandi[7] dans son traité « *De quadratura circuli et hyperbolae* ». Ce résultat avait soulevé des questions de la part de Marchetti, qui refusait les arguments de Grandi. Voici ce qu'en dit Leibnitz à Wolf :

> *Tu demandes de moi, Homme Très Célèbre, ce que je pense au sujet de la question renouvelée du Très Célèbre Guido Grandi, si 1-1+1-1+1-1 etc. à l'infini est fait ½ ; et comment l'absurdité qui semble se montrer dans une telle énonciation, pourrait être évitée.*

Voici à gauche la représentation graphique de Guido Grandi reproduite par Leibnitz et une interprétation actuelle, à droite.



L'argumentation (intuitive) utilisée par Guido Grandi, reprise par Leibnitz, était la suivante :

> *Il imagine deux frères dans une affaire de partage occupés à découvrir dans l'héritage paternel une pierre d'un prix immense, et celle-ci est interdite d'être vendue par le testament ; c'est pourquoi ils convinrent ainsi entre eux qu'elle serait placée dans le musée de l'un des deux. Et ainsi si cette loi est établie entre les héritiers pour toujours, l'une des deux lignées des frères à qui la pierre serait donnée indéfiniment et ôtée indéfiniment possédera correctement en cela la moitié du droit.*

Nous pouvons constater que les arguments de Guido Grandi s'appuient sur deux sortes de représentations : 1) visuelle ; 2) intuitive.

Grandi a sûrement utilisé les égalités suivantes pour conjecturer que « 1 – 1 + 1 – 1 etc. à l'infini, fait ½ », puisque le membre de gauche de la seconde égalité, évalué en 1, donne bien ½ :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + xx + x^3 + x^4 + \ldots, \text{ à l'infini, et } \frac{1}{1+x} = 1 - x + xx - x^3 + x^4 - x^5 \ldots, \text{ à l'infini.}$$

Grégoire de Saint-Vincent, Newton, Mercator et Wallis avaient travaillé sur ces égalités et Wallis avait même affirmé que l'égalité était vraie pour $x < 1$.

[6] Nous n'avons pas pu obtenir l'information directe de la lettre de Wolf, et la réfutation de Marchetti aux arguments de Guido Grandi. Mais, la lettre de Leibnitz à Wolf a suffisamment d'éléments pour permettre la reconstruction de la situation, et le résultat de Guido Grandi.

[7] Guido Grandi, *Quadratura circuli et hyperbolae*, deuxième édition, Pisis, ex typographia Francisci Bindi, 1710 (première édition, 1703).

On peut se demander pourquoi Grandi utilise des arguments, l'un visuel, l'autre intuitif, pour expliquer sa conjecture pour $x = 1$. En fait, d'après la lettre de Leibnitz, Alessandro Marchetti et Chrétien Wolf ont refusé son argument intuitif (dans l'extrait ci-dessous, *BV* fait référence à la longueur du segment dans la figure de la page précédente) :

> *Car effectivement ici une difficulté se montre, objectée à bon droit par toi, Homme très illustre, et par Maître Marchetti. En effet puisque BV –BV ou 1 – 1 est 0 ; est-ce qu'il suit que BV – BV + BV – BV + BV –BV + etc., à l'infini ou 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 + etc., à l'infini n'est rien d'autre que 0 + 0 + 0 + etc. ? Et comment cela pourrait faire ½, n'apparaît pas.*

Face à cette question soulevée d'abord par Marchetti et ensuite par Wolf, Leibnitz a répondu avec différents types d'arguments. Signalons que Leibnitz était d'accord avec le résultat (à savoir, que la somme infinie donne ½), mais qu'il voulait seulement faire quelques remarques :

> *Mais puisque cela fait la matière de mettre en lumière avant tout la Science de l'infini (jusqu'à ce jour non encore traitée selon la dignité), et que c'est d'une recherche agréable, il vaudra la peine de revenir un peu plus haut et de le ramener vers ses sources, ce dont j'ai confiance qu'il ne sera pas déplaisant au Très Célèbre Grandi, dont nous appuyons ici l'insigne conclusion, quoique nous pensions que quelques uns de ses raisonnements et conséquences manquent de correction, afin que la science ne soit pas atteinte par quelque préjudice.*

En analysant la lettre de Leibnitz, nous pouvons faire ressortir les arguments suivants. Leibnitz s'appuie sur les résultats de Grégoire de Saint-Vincent et de Mercator[8] :

> *Il a été montré récemment* […] *par Grégoire de Saint-Vincent, que* $\frac{1}{1-x} = 1 + x + xx + x^3 + x^4$ *etc. à l'infini, à savoir si x est posée être une quantité plus petite que l'unité. Nicolas Mercateur du Holstein transporta cela à* $\frac{1}{1+x} = 1 - x + xx - x^3 + x^4 - x^5$ *etc. à l'infini, ce qu'il montre (en même temps avec précédent) d'après une certaine division sans interruption ; quoique cela encore suivie du premier en posant +x pour –x.*

$$
\begin{array}{l|l}
1 & 1+x \\
\cline{2-2}
\underline{1+x} & 1 - x + x^2 - x^3 \ldots \\
\quad -x & \\
\quad \underline{-x - x^2} & \\
\qquad\quad x^2 & \\
\qquad\quad \underline{x^2 + x^3} & \\
\qquad\qquad -x^3 & \\
\qquad\qquad \underline{-x^3 - x^4} & \\
\qquad\qquad\qquad x^4 & \\
\qquad\qquad\qquad \vdots &
\end{array}
$$

1. Leibnitz est convaincu que la conjecture est vraie par la simple observation de la représentation graphique: « La figure employée par Maître *Grandi* pousse cela aux yeux d'une certaine façon ».

[8] … dont il francise le nom en « Mercateur ».

2. Leibnitz appuie le résultat visuel en se basant sur sa Loi de continuité : « Et cela est en accord avec la *Loi de Continuité* proposée jadis en premier par moi dans les Nouvelles Littéraires de Bâle et appliquée aux lois du Mouvement ; où il est fait que *dans des continus l'extrême exclu pourrait être traité comme inclus*. »
3. Leibnitz n'est pas d'accord avec l'exemple intuitif donné par Guido Grandi et il donne son propre argument (argument qu'il va répéter dans une autre lettre à Dangicourt, datée de 1716) :

> *Apportons donc maintenant la vraie solution, peut-être inattendue, certainement particulière, de l'énigme et la raison du paradoxe, en revenant vers la série finie et ensuite en franchissant vers l'infini.* […] *En effet la série finie 1 – 1 + 1 – 1 etc. peut être doublement développée : en effet ou elle existe d'après un nombre pair de nombres et est terminée par –, comme 1 – 1 ou 1 – 1 + 1 – 1 ou 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 ou enfin avancer jusqu'à quelque point ; en ce cas elle produit toujours 0 ; ou elle existe d'après un nombre impair de nombres et est terminée par +, comme 1 ou 1 – 1 + 1 ou 1 – 1 + 1 – 1 + 1 ou enfin avancer jusqu'à quelque point ; en ce cas elle produit toujours 1. Mais puisque la Série est infinie, c'est-à-dire 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 + etc. à l'infini, de telle sorte qu'elle excède un nombre quelconque ; alors par la nature évanouissante du nombre, l'assignabilité du pair ou de l'impair s'évanouit encore, et puisqu'il n'y a plus aucune raison pour la parité ou l'imparité, et donc pour produire d'avantage 0 que 1, il est fait par une admirable disposition de la nature, que par le passage du fini à l'infini, le passage depuis la disjonctive (désormais cessant) à l'unité positive (qui subsiste) deviendrait la moyenne entre les disjonctives. Et puisqu'il est montré par ceux qui écrivirent sur l'estimation, que lorsque la moyenne est à prendre entre deux quantités s'appuyant sur une égale raison, on doit prendre la moyenne Arithmétique qui est la moitié de la somme, c'est pourquoi la nature des choses observe ici la même loi de justice ; et en effet puisque 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 + etc. est pareil à 0 dans le cas fini d'un nombre pair de membres, mais est 1 dans le cas fini d'un nombre impair de membres, il suit que dans le cas de l'une et l'autre multitude s'évanouissant de membres infinis où les droits du pair et de l'impair sont confondus, et qu'il y a tout autant de raison pour l'un et pour l'autre, il se produit* $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$*, ce qui était proposé.*

Donc, d'après Leibnitz, pour différentes raisons, le résultat est vrai :

« La somme 1 – 1 + 1 – 1 etc., à l'infini, fait ½ »

La division sans interruption, la représentation visuelle et sa « Loi de continuité » sont des préludes pour convaincre de la véracité du résultat, et la preuve se trouve, selon Leibnitz, dans les arguments avancés dans le quatrième point.

Mais l'histoire ne finit pas là. Dans l'*Encyclopédie* (Diderot et D'Alembert, 1751), D'Alembert indique que Pierre Varignon (1715) a éclairci l'utilisation d'une division illimitée. À ce sujet, D'Alembert écrit ce qui suit :

> *Un auteur nommé Guido Ubaldus dans son traité* De quadratura circuli et hyperbolae*, a poussé ce raisonnement plus loin et en a tiré une conséquence fort singulière : ayant pris la suite 1/2 = 1/(1 + 1) et ayant fait la division il a trouvé au quotient 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1, etc. qui à l'infini ne peut jamais donner que 1 ou 0; à savoir :*
>
> - *1, si on prend un nombre impair de termes ;*
> - *0, si on prend un nombre pair.*

D'où cet auteur a conclu que la fraction 1/2 pouvait devenir 1 par une certaine opération et que 0 pouvait être aussi égal à 1/2 et que par conséquent la Création était possible, puisqu'avec moins on pouvait faire plus.

L'erreur de cet auteur venait de n'avoir pas remarqué que la suite 1 − 1 + 1 − 1, etc. et en général $1 - c + c^2 - c^3$*, etc. n'exprimait point exactement la valeur de la fraction 1/(1 + c). Car supposons qu'on ait poussé le quotient de la division jusqu'à cinq termes, comme la division ne se fait jamais exactement, il y a toujours un reste. Soit r ce reste; pour avoir le quotient exact, il faut, comme dans la division ordinaire, ajouter ce reste r divisé par le diviseur 1 + c, à la partie déjà trouvée du quotient. Ainsi supposons que la série générale soit terminée à* $-c^3$*, on aura :*

$$\frac{1}{1+c} = 1 - c + c^2 - c^3 + \frac{r}{1+c} = \frac{1 - c + c - c^2 + c^2 - c^3 + c^3 - c^4 + r}{1+c}$$

$$\frac{1}{1+c} = 1 - c + c^2 - c^3 + \frac{c^4}{1+c}$$

Par conséquent la valeur exacte de ½ = $\frac{1}{1+1}$ *est* $1 - 1 + 1 - 1 + \frac{1}{1+1}$ *et cette valeur se trouve toujours égale à ½ et non pas zéro ou 1.*

Donc, D'Alembert pense que la conclusion est vraie, mais il réfute le processus de division sans interruption :

Nous n'avons pas pu trouver plus d'information sur la controverse. Mais, pour finaliser nous pouvons ajouter qu'à la suite des résultats contradictoires trouvés par quelques mathématiciens du XIX^e siècle en utilisant la « Loi de Continuité de Leibnitz », cette loi a été rejetée des mathématiques. De plus, le résultat 1 – 1 + 1 – 1 +… = ½ a été rejeté une fois construite la théorie sur les limites ; à savoir : soit $\{s_n\}_{n=1}^{+\infty}$ une suite telle que $s_1 = 1$, $s_2 = 1 - 1$, $s_3 = 1 - 1 + 1$, $s_4 = 1 - 1 + 1 - 1$, etc. La limite de la suite s_n, quand n tend vers l'infini, existe-t-elle ?

Puisque $\{s_{2n}\}_{n=1}^{+\infty}$ et $\{s_{2n+1}\}_{n=1}^{+\infty}$ sont deux sous-suites de $\{s_n\}_{n=1}^{+\infty}$ qui convergent à différents nombres — $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = 0$ et $\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = 1$ — et puisque la limite d'une suite, si elle existe, doit être unique, alors la limite n'existe pas !

Si nous suivons cette dernière approche dans l'enseignement, alors nous perdons toute la richesse que l'histoire des mathématiques peut nous apporter pour mieux comprendre la construction des mathématiques.

4. CONCLUSION

L'analyse que nous avons faite dans ce document cherche à montrer que si nous nous situons dans les années 1700, nous pourrions être satisfaits de ce qu'un résultat mathématique « est devenu vrai » parce qu'une communauté de mathématiciens a statué sur la vérité de l'énoncé en question, et que les désaccords et négociations entre les mathématiciens de l'époque les conduisent à « l'amélioration d'un processus de preuve », même s'ils ne sont pas arrivés à la démonstration de ce résultat.

Tant que les processus à l'infini n'ont pu être apprivoisés, il y a eu beaucoup d'erreurs commises du point de vue des mathématiques actuelles. Par contre, cela n'a pas empêché de découvrir beaucoup de résultats intéressants. C'est avec l'arithmétisation de l'analyse que l'expert (dans une mathématique actuelle) refuse le résultat précédent et donne une démonstration sur la non-existence de la limite de la série $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$. N'oublions pas que les mathématiciens qui ont fait des erreurs sont des mathématiciens qui connaissaient bien la démonstration en géométrie et que ça montre que le processus de preuve et de démonstration est beaucoup plus complexe que ce qu'on avait cru dans le passé.

Une voie à explorer est celle qui comporterait l'analyse des processus de communication et preuve entre les mathématiciens du passé au moment où ils discutent de la construction d'un concept mathématique, et leur comparaison avec les processus de communication et preuve dans la classe de mathématiques. L'analyse pourrait nous conduire à la découverte d'éléments qui déclenchent un type différent de raisonnement, et pourrait par suite nous servir à mieux comprendre les processus de preuve chez les mathématiciens et chez nos étudiants. La production d'activités qui, dans un environnement de débat scientifique, peuvent provoquer chez nos étudiants une sensibilité à la contradiction, est absolument nécessaire.

Nous avons pu constater que les arguments des étudiants sont plutôt près des arguments des mathématiciens du passé et que nous devons faire attention quand nous présentons aux étudiants « une mathématique achevée », qui est trop souvent loin de leur compréhension. En fait, cette réflexion n'est pas propre qu'aux mathématiques. Bader (2004, p. 15) signale l'importance de promouvoir le débat scientifique en classe de science afin d'adopter une approche plus proche de la réalité, dans la construction des connaissances.

Du point de vue de la didactique, nous pouvons profiter de l'histoire des mathématiques pour mieux comprendre les processus des étudiants, afin de construire des activités qui puissent les aider à réfléchir sur la vérité ou non d'un énoncé et sur leur processus de démonstration. Ce que nous avons montré nous amène à penser que probablement, dans la classe de mathématiques, ça peut être important de demander aux étudiants des « argumentations pour convaincre » et des « processus de preuve », en espérant que la confrontation des idées va déclencher une nécessité de démonstration. Ceci pourra-t-il promouvoir une réflexion sur la différence entre argumenter et démontrer ?

À part la sensibilité à la contradiction, il nous semble qu'une partie très importante d'un apprentissage des processus de démonstration est le rôle du contre-exemple. Mais ça, c'est une autre histoire !!!

BIBLIOGRAPHIE

BADER, B. (2004). Disqualification de points de vue critiques face aux sciences : procédés discursifs de jeunes du secondaire. *Cahiers du Cirade*, n°3, pp. 5-23.

BACHELARD, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Librairie philosophique J. Vrin, Paris.

BALACHEFF, N. (1999). L'argumentation est-elle un obstacle ? Invitation à un débat... *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, May-June. http://www.lettredelapreuve.it.
Consulté en janvier 2005.

DUVAL, R. (1992-93). Argumenter, démontrer, expliquer : Continuité ou rupture cognitive ? *Petit x* , n°31, pp. 37-61.

DIDEROT, D. et D'ALEMBERT, J. (1751). L'*Encyclopédie, Dictionnaire raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers*. Paris. http://www.sciences-en-ligne.com Consulté en mars 2005.

DUCHET, P. (2001). Drôles de preuves. *Comptes Rendus Math.en.Jeans*, http://www.mjc-andre.org/pages/amej/edition/9806preuves/98preuve.html.
Consulté en janvier 2005.

GRIZE, J.-B. et PIÉRAULT, G. (1983). *La contradiction. Essai sur les opérations de la pensée*. Presses Universitaires de France, Paris.

HITT, F. (2004). L'aube de la preuve en mathématique et le principe du tiers exclu. In *Actes du colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec, GDM 2004*, pp. 61-71. F. Caron, éd. Université de Montréal.

LEIBNITZ, G. G. (1713). Lettre à l'Homme Très Illustre Chrétien Wolf, Professeur de Mathématiques à Halle, sur la science de l'Infini. In *Godefroy-Guillaume Leibnitz, Oeuvre concernant le Calcul Infinitésimal*, pp. 66-70. Traduit du latin au français par J. Peyroux. Librairie Blanchard, Paris.

PERRIN, D. (1997). Rigueur et formalisme(s). *Table ronde Formalisme et rigueur*, IX^{e} École d'été de Didactique des Mathématiques.
http://www.lettredelapreuve.it/TextesDivers/TableRondeEEDM97/Perrin97TableRonde.html.
Consulté en avril 2005.

TANGUAY, D. (2005). Une expérimentation sur l'apprentissage de la structure déductive en démonstration. In *Actes du 4^{e} Colloque de didactique des mathématiques de l'Université de Crête*, pp. 57-75. M. Kourkoulos, G. Troulis et C. Tzanakis, éds. Rethymnon, Grèce.

TUTESCU, M. (2003). *L'Argumentation : Introduction à l'étude du discours.* Première édition : Editura Universităţii din Bucureşti under ISBN 973-575-248-4. © Universitatea din Bucuresti 2003. http://www.unibuc.ro/eBooks/lls/MarianaTutescu-Argumentation,

Consulté en février 2004.

Le rôle des activités expérimentales dans la construction des concepts géométriques

ELENA EKIMOVA-BOUBLIL

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

RÉSUMÉ. Notre présentation cherche à répondre à une des questions posées pour ce colloque : « Comment la manière d'aborder les concepts et processus mathématiques doit-elle évoluer du primaire au secondaire, pour que les raisonnements progressent jusqu'à rencontrer ces "exigences de rigueur, d'exactitude, de justification et de preuve", caractéristiques de l'activité mathématique ? ». Nous décrivons brièvement une approche de l'enseignement de la géométrie au primaire, introduite dans le cadre de la formation en didactique de futurs maîtres. Son élaboration repose sur l'analyse didactique de différentes recherches sur les obstacles et les difficultés des élèves dans leur apprentissage de la géométrie et dans la résolution de problèmes géométriques, ainsi que sur l'analyse des programmes ministériels, des manuels et des pratiques enseignantes[1]. À partir de deux cadres théoriques — les niveaux de la pensée géométrique de van Hiele (1959, 1986) et la notion de registres de représentations sémiotiques de Duval (1995) — nous représentons l'enseignement de la géométrie en tant que structure qui réunit les objectifs de l'enseignement de la géométrie, la progression des apprentissages selon les niveaux de la pensée géométrique, la multiplicité et la coordination des registres de représentation et les différentes activités géométriques qui permettent d'atteindre les objectifs visés.

INTRODUCTION

Dans les passages d'un cycle d'enseignement à un autre, il est souvent impossible pour l'enseignant du cycle supérieur d'utiliser les connaissances acquises par ses élèves au niveau précédent. Cette impossibilité est due, entre autres, à l'absence d'une « culture géométrique commune » aux enseignants, à leur préparation géométrique et aussi à leurs habitudes ou préférences pour certains sujets ou pratiques géométriques, etc. (Brown, Cooney et Jones, 1990 ; Fennema et Franke, 1992 ; Graeber, Tirosh, Glover, 1986 ; Porter, 1989 ; Mayberry, 1983 ; Burton, Detheux-Jehin et Fagnant, 1997). En conséquence, l'enseignant propose souvent des situations qui mettent en jeu les connaissances non (ou mal) apprises. Pour faire fonctionner la situation ou pour simplement atteindre les objectifs visés, l'enseignant explique (en démontrant) les propriétés nécessaires et propose des exercices d'application. Une telle gestion des connaissances perturbe les apprentissages des élèves et ralentit la progression. Plusieurs chercheurs (voir entre autres Berthelot et Salin, 1992) ont montré que ces ostensions ne servent pas à développer de façon harmonieuse la connaissance de l'espace, ne participent pas à la construction des concepts et des processus géométriques et brouillent le caractère déductif de la géométrie, car le raisonnement est directement lié à la cohérence conceptuelle.

[1] Le lecteur intéressé peut se référer à Ekimova-Boublil (2005), thèse de doctorat à paraître.

La question que nous voulons traiter touche au fond à l'enseignement de la géométrie au primaire et constitue l'une des questions que nous avons posées dans le cadre de l'organisation de la formation didactique des futurs maîtres. Elle est directement liée au questionnement plus général : *Comment peut-on introduire les élèves à l'étude de la géométrie ?* Dans cette présentation, il s'agit de décrire l'approche qui a été développée dans le cadre d'une préparation à l'enseignement de la géométrie et qui tient compte de la complexité de cet enseignement. Dans la première partie, nous dégagerons les éléments essentiels du développement géométrique. Ensuite, nous présentons les concepts didactiques que nous avons utilisés pour l'élaboration d'une approche de l'enseignement de la géométrie au primaire. La description de cette approche constitue la troisième partie de notre présentation. Dans la conclusion, nous présentons quelques problèmes géométriques de l'enseignement secondaire en décrivant les connaissances mises en jeu et en les associant aux expériences géométriques proposées par l'enseignement primaire.

1. QUE VISE (OU DOIT VISER) L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE À L'ÉCOLE PRIMAIRE ?

Plusieurs recherches dans le domaine de l'enseignement de la géométrie, cherchant à relever les difficultés des élèves dans cet apprentissage, soulignent le rôle de la visualisation, du langage géométrique, du raisonnement dans la construction des concepts et dans la résolution des problèmes géométriques (Fuys, Geddes et Tischler, 1988 ; Clements et Battista, 1989 ; Bishop, 1989 ; Hershkowitz, 1989 ; Laborde, 1988 ;Yakimanskaya 1971 ; van Hiele, 1986). Le contenu des trois sections suivantes vise à mettre en évidence l'importance de ces éléments dans le développement de la pensée géométrique.

1.1. Visualisation

« Visualizations are used as a basis for assimilating abstract [geometric] knowledge and individual concepts », souligne Yakimanskaya (1971, p. 145). Laborde (1988, p. 343) affirme également que « les données issues de la perception sont un des éléments clés dans la construction des savoirs théoriques ». Fuys, Geddes et Tischler (1988) soulignent l'importance et l'utilité d'une approche visuelle dans les activités expérimentales, au niveau de l'enseignement primaire, tant pour maintenir l'intérêt des élèves que pour les aider dans la construction des concepts géométriques. Elle prépare, de façon intuitive, la prise de conscience des propriétés géométriques, vise l'enrichissement et la structuration de l'expérience spatiale des élèves et permet à l'élève d'effectuer un contrôle efficace de ses relations à l'espace sensible (Berthelot et Salin, 1992) et un passage de l'espace représentatif (ou sensible) à l'espace géométrique[2]. Vergnaud souligne la contribution de la perception et de l'imagination à la conceptualisation, car « la conceptualisation est, par définition, l'identification des objets du monde et de leurs propriétés et relations » (Vergnaud, 2001, p. 25).

[2] Chevallard (1991) définit l'espace sensible comme « l'espace contenant des objets, et qui nous est accessible par le biais des sens » et l'espace géométrique comme le « résultat de l'effort théorique appelé géométrie » (cité dans Berthelot et Salin, 1992, p. 28).

1.2. Langage

Vergnaud (1991) accorde un rôle important au langage et à l'intuition géométriques dans l'acquisition de nombreux concepts, et il souligne que beaucoup d'échecs en mathématiques s'expliquent par l'incapacité à lire correctement, à comprendre l'énoncé, à justifier la démarche, etc.

Les recherches analysées (Van Hiele, 1987 ; Yakimanskaya, 1971 ; Fuys, Geddes et Tischler, 1988) font ressortir qu'afin de mettre en œuvre le processus de conceptualisation nécessaire à l'énonciation, on doit beaucoup insister sur la recherche et la description du maximum de propriétés d'une figure géométrique, pour établir une base permettant plus tard la déduction des propriétés. Par conséquent, ce type de travail permet d'élargir le concept géométrique particulier et d'éviter les obstacles associés à la modification d'un concept déjà établi dans une forme réduite ou d'un énoncé géométrique mémorisé sans compréhension. Si, précise Yakimanskay (1971), les enseignants fournissent seulement les informations verbales des propriétés de figures et ne se préoccupent pas de l'organisation des activités pour le développement de l'imagination spatiale des étudiants, cet enseignement « formaliste » ne participera pas à la construction des concepts. Dans de telles conditions, l'apprentissage au niveau supérieur exigera une mémorisation (Clements et Battista, 1992).

1.3. Raisonnement

Le raisonnement est l'un des éléments fondamentaux dans la construction des concepts géométriques (Vergnaud, 1991), et son emploi représente un indice de la progression conceptuelle de l'élève (van Hiele, 1985). En ce sens, la géométrie présente un lieu privilégié, car elle « entraîne les élèves au raisonnement mathématique, c'est-à-dire à un mélange de raisonnement déductif et d'imagination inductive, activé par une manipulation familière des images » et « prépare les élèves à aborder d'autres théories mathématiques » (Brousseau, 2000, p. 1). Paul et Elder (2001) décrivent la complexité du processus de raisonnement par l'implication d'un ensemble de processus intellectuels interreliés, et qui engagent des connaissances, des expériences et différents gestes mentaux.

En ce qui concerne le raisonnement visé par l'enseignement primaire, en plus du raisonnement *inductif* et *déductif*, le nouveau programme ajoute le raisonnement *créatif*, où l'élève est appelé « à imaginer des combinaisons d'opérations pour trouver diverses réponses à une situation-problème » (MEQ, 2002, p. 124). En décrivant le raisonnement par la capacité « à établir des relations, à les combiner entre elles et à les soumettre à diverses opérations pour créer de nouveaux concepts et pour pousser plus loin l'exercice de la pensée mathématique », le programme ministériel souligne aussi que ce processus exige « [d']effectuer des activités mentales telles que abstraire, coordonner, différencier, intégrer, construire et structurer », qui s'exercent sur les relations entre les objets ou entre leurs propriétés (MEQ, 2002, p. 128).

Van Hiele (1987) écrit que dès l'école primaire, on doit offrir aux élèves des occasions pour la construction de la pensée géométrique, et que si les élèves n'atteignent pas le niveau suffisant pour employer le raisonnement, c'est en partie parce qu'on ne leur offre pas de problèmes géométriques appropriés. Cette période prolongée « d'inactivité géométrique » (Wirszup, 1976, p. 85), dans les premières années d'apprentissage, rendrait les élèves « geometrically deprived » (Fuys, Geddes & Tischler, 1988). Wirszup (1976) prétend aussi que la période d'accumulation par induction des faits ne doit pas être prolongée trop longtemps ; il indique que la déduction simple doit être encouragée dès l'école primaire. Les enseignants devraient orienter leur travail tout d'abord vers le niveau où « des figures géométriques deviennent les porteurs de propriétés » (Wirszup, 1976, p. 88), pour ensuite viser la compréhension des relations entre les propriétés de la figure et entre les figures.

Notons d'emblée, à l'instar de Brousseau, que la tendance des « mathématiques modernes » à assimiler le raisonnement mathématique au raisonnement déductif a contribué fortement « […] à dévaluer la partie du "raisonnement" qui, à l'école primaire consistait à ordonnancer, à annoncer et à justifier un ensemble de tâches, ou un calcul… » (Brousseau, 2000, p. 2).

À partir de l'analyse de différentes activités de manuels scolaires (activités expérimentales visant le regroupement des objets, justification des énoncés, construction des figures, résolution de problèmes géométriques) et des descriptions présentées ci-dessus, nous interprétons l'emploi du raisonnement visé par ce niveau d'enseignement en tant qu'utilisation d'opérations mentales qui favorisent la formation des idées et des jugements destinés à construire la connaissance, à mettre de l'ordre dans la connaissance, à justifier, à convaincre, à prouver ou à réfuter et à développer des relations de dépendance entre des propositions pour aboutir à une conclusion. Il s'agit pour nous plus du fonctionnement « naturel »[3] du raisonnement qui est commandé par les représentations des sujets (Duval, 1995) en distinction du raisonnement « logique »[4], qui est commandé par des règles de validité.

Dans le tableau ci-dessous, nous avons tâché de préciser les éléments essentiels de développement de la pensée géométrique qui ont ressorti de nos analyses des difficultés des élèves dans leurs apprentissages de la géométrie et dans la résolution de problèmes géométriques, ainsi que de l'analyse de différents types d'activité géométrique et des buts visés par chacune.

[3] Barbin (2002) précise la distinction entre la *géométrie déductive*, où les propositions se déduisent les unes des autres dans un discours, et la *géométrie naturelle*, où les objets se déduisent les uns des autres.

[4] Duval (1995, p. 250) distingue les formes suivantes de raisonnement :

- le syllogisme aristotélicien, qui a été si longtemps considéré comme le raisonnement logique ;
- le raisonnement déductif et le raisonnement par l'absurde qui sont, en mathématiques, les formes de raisonnement pour la démonstration ;
- l'argumentation, forme de raisonnement plus adaptée aux situations ouvertes de discussion ou de recherche.

Il associe le syllogisme et le raisonnement déductif à des formes de raisonnement démonstratif, et l'argumentation à une forme de raisonnement explicatif de la vérité d'une proposition, car le rapport qu'un argument entretient avec une conclusion a un caractère de justification. Dans une argumentation, écrit Duval, l'énoncé-cible ne dérive pas des propositions antérieures et « […] un raisonnement argumentatif ne peut donc pas imposer sa conclusion par la validité des opérations discursives effectuées, mais par la pertinence du contenu des propositions avancées pour justifier la conclusion défendue » (Idem., pp. 275-276). Et c'est cette impossibilité d'assurer la validité, affirme Duval, qui exclut l'argumentation du domaine de la logique.

	Description
1. Visualisation	– Reconnaître des représentations (physiques et graphiques)* des figures (de dimensions 3, 2, 1 et 0) – Reconnaître des éléments visuels** de la figure (de dimensions 3, 2, 1 et 0) (abstraction) – Visualiser (et représenter graphiquement ou à l'aide d'outils) des figures à partir de leurs noms ou de la description de leurs propriétés*** (imagination spatiale) – Repérer la ressemblance ou la dissemblance des objets observés (comparaison visuelle) – Visualiser des propriétés (non-décrites et non-tracées) appartenant à une figure qui sont nécessaires à la résolution (imagination spatiale) * *représentations habituelles et inhabituelles* ** *en positions habituelles ou non* *** *définitions caractéristiques, conceptuo-lexicales ou constructives*
2. Langage	– Employer le langage géométrique dans : ▪ l'identification des figures (de dimensions 3, 2, 1 et 0) ▪ la description des figures (ensemble de propriétés découvertes dans les situations) ▪ la définition (caractéristique) des figures ▪ la description des démarches – Employer le langage symbolique dans la production des énoncés et des messages écrits : $\angle$, //, $\perp$, $\cong$, π, h (hauteur), (a, b, c, d, côtés), P (périmètre), A (aire), C (circonférence), D (diamètre), R (rayon), etc.
3. Raisonnement	– Employer (choisir et appliquer) les concepts et les processus appropriés à la tâche, au problème, à la situation – Justifier l'énoncé, le résultat, la démarche en faisant appel à des concepts et à des processus mathématiques (géométriques) ou en trouvant un contre-exemple – Dégager des relations entre les figures (ou entre les propriétés) à partir de l'observation, de manipulation ou de l'analyse des données – Créer un système hiérarchisé de classes (formuler des relations d'inclusion)

Tableau 1. Éléments essentiels du développement géométrique

En analysant cette description, nous pouvons remarquer que la visualisation[5] est un élément indispensable à l'étude géométrique, et en particulier au développement du langage, du raisonnement et à la résolution des problèmes géométriques. La description du langage et du raisonnement précise ce qui est attendu par les programmes au niveau des compétences visées par l'enseignement de la géométrie. Même si elle ne spécifie pas à quel type de raisonnement se réfèrent ses composantes, nous pouvons reconnaître les démarches permettant leur emploi. Par exemple, la composante « Employer (choisir et appliquer) les concepts et les processus appropriés à la tâche, au problème, à la situation » peut faire appel au raisonnement par analogie (en employant les mêmes processus dans la situation semblable) ou au raisonnement déductif (dans la construction des figures ou dans la résolution des problèmes). Dans la composante « Dégager des relations entre les figures (ou entre les propriétés) à partir de l'observation, de manipulation ou de l'analyse des données », nous pouvons reconnaître les activités de découverte des relations entre les

[5] La visualisation n'est pas évoquée par les programmes ministériels en tant que compétence essentielle visée par l'enseignement des mathématiques.

figures (entre les triangles, entre les quadrilatères particuliers, etc.), des relations métriques qui emploient la démarche inductive, etc.

Le but de cette description est de déterminer les objectifs principaux de l'enseignement de la géométrie à l'école primaire : **Développer la visualisation, le langage, le raisonnement qui participeront à la construction des concepts et des processus géométriques et à la résolution des problèmes géométriques.**

2. CADRE THÉORIQUE

Dans cette présentation, nous dégagerons les cadres de deux chercheurs : ceux de van Hiele (1959/1985) et ceux de Duval (1995), car ils constituent les éléments théoriques qui nous ont guidés dans l'élaboration de l'approche de l'enseignement de la géométrie. Bien que ces deux auteurs analysent les différents aspects de la construction des connaissances géométriques, l'orientation de leurs recherches est différente. Si les niveaux de développement de la pensée géométrique de van Hiele (1959/1985) nous aident à réfléchir sur la continuité des apprentissages et à avoir des observables dans les comportements des élèves, l'approche sémiotique de Duval (1995) et la notion de registres de représentations nous permettent d'entrer au fond de l'activité géométrique, de préciser les savoirs géométriques et d'envisager la manière de travailler les objets géométriques.

2.1. Les niveaux de la pensée géométrique (van Hiele, 1959 / 1985)

Selon la théorie de van Hiele, dans leur apprentissage de la géométrie, les élèves progressent en passant par des niveaux de pensée d'un niveau perceptif (*visuel*) vers le niveau le plus sophistiqué (*rigueur*), à travers les niveaux *descriptif / analytique*, *abstraction / relation* et le niveau de la déduction formelle.

La théorie de van Hiele, développée par les néerlandais Dina et Pierre van Hiele, présente la description de niveaux du développement de la pensée et des étapes d'enseignement des concepts géométriques. Elle est basée sur les postulats suivants :

- L'apprentissage de la géométrie est un processus discontinu.
- Les niveaux sont séquentiels et hiérarchisés. Pour atteindre un niveau plus avancé dans la hiérarchie de van Hiele, les élèves doivent maîtriser les compétences des niveaux inférieurs.
- Les concepts implicitement compris à un niveau précédent deviennent explicitement compris au niveau supérieur.
- Chaque niveau a son propre langage. La structure langagière est un facteur crucial dans le passage au niveau supérieur.

2.2. Coordination des registres de représentations (Duval, 1995)

Selon Duval (1995), les activités visant la conceptualisation, l'appréhension des figures, la résolution de problèmes, le raisonnement requièrent l'utilisation de différents systèmes d'expressions et de représentations : les images, le langage naturel, l'écriture symbolique pour les objets géométriques et les relations entre eux, des graphes, des réseaux, des diagrammes et des schémas, etc. « […] Il n'y a pas des actes cognitifs (comme l'appréhension conceptuelle d'un objet, la discrimination d'une différence ou la compréhension d'une inférence) sans le recours à une pluralité au moins potentielle de systèmes sémiotiques, recours qui implique leur coordination pour le sujet lui-même » (op. cit., p. 5).

Pour Duval, les activités qui supposent un travail sur un même objet selon ses différentes représentations développent les capacités cognitives de l'apprenant, ses représentations mentales et permettent une meilleure compréhension de l'objet ; et c'est en particulier vrai pour les objets géométriques. Comme une même représentation graphique peut représenter des objets géométriques très différents et qu'à l'inverse, le même « objet » géométrique peut être représenté par différentes représentations verbales, la reconnaissance de cet objet et la rapidité de l'évocation dépendront de l'expérience géométrique et du niveau conceptuel de l'un individu. Cette interaction peut se trouver bloquée, remarque Duval (1995), si les élèves n'ont pas appris à intégrer le niveau d'une appréhension gestaltiste des figures dans celui de leur appréhension opératoire, et s'ils n'ont pas découvert la spécificité de l'organisation déductive du discours par rapport à d'autres formes d'expansion discursive comme, par exemple, la description. Toute confusion entre l'objet et sa représentation entraîne une perte de compréhension et les connaissances acquises deviennent alors vite inutilisables en dehors de leur contexte d'apprentissage : soit par non-rappel, soit parce qu'elles « […] restent des représentations "inertes" ne suggérant aucun traitement producteur » (op. cit., p. 2).

L'activité géométrique fait appel à au moins deux registres sémiotiques de représentations, le *registre discursif* (pour désigner les figures et leurs propriétés, énoncer les définitions, etc.) et le *registre des figures* (qui relève de l'organisation de la perception visuelle).

> *L'originalité des démarches en géométrie, par rapport à d'autres formes d'activités mathématiques, tient au fait que la coordination des traitements spécifiques au registre des figures et à celui d'un discours théorique en langue naturelle y devient absolument nécessaire* (op. cit., p. 173).

La spécificité de l'activité géométrique ne se réduit pas à une coordination nécessaire entre des traitements dans les deux registres ; elle tient aussi au fait que les traitements qu'elle requiert vont à l'encontre de ceux qu'on y pratique spontanément. Pour éviter les impasses d'une *fausse proximité* (idem, p. 194) entre les traitements pertinents et ceux qui sont effectués spontanément dans la perception des figures, dans la compréhension du discours et dans sa production, les activités géométriques devraient viser d'abord les traitements de deux registres séparément, et une telle séparation des registres de traitements « n'implique ni leur opposition, ni l'élimination de l'un au profit de l'autre, mais elle appelle, au contraire, leur articulation » (idem, p. 294).

Selon Duval (1995), le rôle heuristique des figures dans l'activité géométrique est assuré par une possibilité intrinsèque de coordination des registres, c'est-à-dire que le contenu de certaines propositions peut être converti dans le registre des représentations figurales et vice versa. En effet, la correspondance entre le registre des figures et celui du discours s'établit au niveau de la correspondance entre des unités figurales[6] et des expressions référentielles. Dans le registre des figures, les allers et retours entre des unités figurales de dimensions différentes impliquent des sauts dans la perception de la figure (idem, p. 191) : « […] une figure joue donc un rôle heuristique si elle permet de travailler à la dimension supérieure à celle des unités figurales qui représentent un énoncé ».

Nous pouvons conclure qu'en visant le développement des capacités cognitives de l'apprenant, de ses représentations mentales et par le fait même, la compréhension des objets géométriques, la construction des concepts et la réussite dans la résolution des problèmes géométriques, l'enseignement de la géométrie à l'école primaire doit favoriser la coordination des traitements relevant de registres sémiotiques différents[7] et viser la réduction de l'écart qui affecte considérablement les fonctions discursives de référence et d'expansion discursive.

Duval et van Hiele, comme d'ailleurs plusieurs autres chercheurs cités (Fuys, Geddes et Tischler, 1988 ; Yakimanskaya 1971 ; Vergnaud, 2001 ; Berthelot et Salin, 1992) signalent qu'afin de favoriser l'enrichissement et la structuration de l'expérience spatiale des élèves, et d'imposer naturellement la nécessité de raisonnement dans la situation, il faut proposer des activités préparatoires suffisamment riches pour que les élèves aient l'occasion de découvrir et d'observer des relations, des combinaisons de relations qui sont essentielles pour l'appréhension des figures géométriques.

Les activités de manipulation, d'observation, de reproduction, de représentation et de construction permettent à l'élève d'agir sur les objets physiques et de les traiter de façon géométrique (Berthelot et Salin, 1992). Même si ces activités ne relèvent pas directement des connaissances géométriques, elles contribuent au développement de l'imagination, du vocabulaire et initient les élèves aux démarches géométriques : observer, comparer, rechercher, sélectionner, établir des liens, organiser les informations, etc., qui favorisent la structuration de leurs pensées et de leurs connaissances (Vergnaud, 1991).

---

[6] En déterminant les unités élémentaires qui constituent une figure géométrique, Duval rapporte que toute figure apparaît « […] comme une combinaison de valeurs pour chacune des variations visuelles de ces deux types, **dimensionnel** (0, 1, 2 ou 3) et **qualitatif** (ligne droite ou courbe, ouverte ou fermée, grandeur, orientation) » (1995, p. 176). Ces éléments, appelés par Duval des unités figurales élémentaires, fonctionnent comme des unités de base représentatives. Une représentation de la même figure peut avoir moins de variables visuelles pertinentes qu'une autre, ce qui relève de l'organisation de la perception visuelle. La grandeur de segments (par exemple, dans l'étude des angles) et l'orientation (dans l'étude de la symétrie axiale) sont des variables non-pertinentes pour une figure géométrique parce qu'elles ne « […] sont pas susceptibles de représenter intrinsèquement des relations topologiques ou projectives » (Duval, 1995), mais ces variables seront prises en compte dans l'analyse didactique de préparation des apprentissages des figures géométriques.

[7] Dans le cadre de notre recherche (Ekimova, 2005), à partir du cadre théorique de Duval (1995), nous avons essayé de décrire les éléments de savoirs géométriques en les associant au registre de représentation. Même si Duval (1995) souligne qu' « on ne dispose pas encore véritablement de critères sûrs pour établir la ligne de partage qui distingue l'appréhension perceptive de formes représentées et l'appréhension conceptuelle des objets mathématiques représentés. On ne dispose pas davantage de moyens d'analyse pour mettre en évidence les traitements spécifiquement figuraux qui donnent aux figures un rôle heuristique et pour expliquer la variabilité de ce rôle d'une situation à l'autre », nous avons essayé de dissocier, au moins partiellement, les différents éléments des compétences géométriques participant à l'apprentissage.

3. DESCRIPTION DE L'APPROCHE

L'approche développée dans le cadre de la formation de futurs enseignants décrit comment, à partir des différentes activités expérimentales employées dans l'enseignement de la géométrie au primaire, nous pouvons progressivement participer au développement conceptuel des élèves. Pour tendre vers la conceptualisation, il convient donc de proposer des activités permettant de mener des raisonnements différents où le raisonnement adopté va être propre à une connaissance visée.

Selon les objectifs et les connaissances visés par les situations employés par l'enseignement primaire, nous avons distingué les différentes expériences géométriques en quatre catégories générales : *situations de manipulation*, *situations d'observation, situations de construction* et *résolution de problèmes.* Il serait utile de préciser que cette distinction n'est pas restrictive, et qu'une situation de manipulation ou de construction incorpore toujours une démarche d'observation, de même qu'une situation de construction peut exiger une manipulation des objets.[8]

Dans les trois sections suivantes, qui correspondent aux trois premiers niveaux de développement de la pensée géométrique, nous présentons la description de l'enseignement de la géométrie en terme des différentes expériences géométriques, compte tenu des objectifs de l'enseignement (visualisation, langage, raisonnement et leur coordination) et de développement des processus mentaux (observer, comparer, distinguer, évoquer, imaginer, etc.).

Nous avons choisi pour cette présentation la figure géométrique « carré » (qui évidemment doit être vue en tant qu'élément particulier parmi plusieurs autres travaillés dans chaque activité) et nous allons observer le changement de statut de cette figure et du discours portant sur ce concept selon les niveaux de la pensée géométrique. Ensuite, nous décrivons cette progression en terme de registres de représentations en faisant correspondre les différentes représentations des figures au niveau de la pensée géométrique. Il s'agit d'une transposition didactique des savoirs à enseigner selon notre compréhension et notre vision de l'enseignement, ceux-ci étant basées sur nos expériences professionnelles et renant en compte le cadre théorique présenté. Nous espérons que les exemples donnés seront perçus comme un support pour démontrer les éléments essentiels retenus de nos analyses et leur mise en œuvre dans la description de l'approche.

3.1. Niveau visuel

Au niveau *visuel*, l'enseignement de la géométrie vise la reconnaissance des figures selon leur apparence visuelle. À partir de différentes activités portant sur les solides et sur les figures planes, se dégage le nom d'une figure qui peut être identifiée par les contours, les projections, les vues des différents solides, ou comme faisant partie de la collection des figures planes proposées pour l'observation. En mettant en jeu la forme de la figure, ces activités expérimentales favorisent le développement de la visualisation (reconnaissance,

[8] Plusieurs de ces activités sont présentes dans les manuels ; cependant, nos observations des pratiques enseignantes montrent qu'en les proposant en classe, les enseignants se préoccupent plus de manipulations avec les objets ou de l'exécution d'un nombre de tâches (souvent non subordonnées) sans qu'il en résulte la construction d'une connaissance nouvelle.

imagination spatiale, comparaison, abstraction), de la représentation (modeler, dessiner, tracer, construire en utilisant les objets physiques) et du langage correspondant (pour identifier les figures, comparer, expliquer, etc.). Il s'agit de deux types de conversion employée par les activités : $figure \rightarrow nom$ et $nom \rightarrow figure$. Dans les activités de classification, selon van Hiele (1986, p. 83), les élèves expliquent leur choix de regroupement ou de distinction des objets en se basant sur l'apparence visuelle appelée « la forme », sans être capables pour autant de nommer une propriété qui les unit ou qui les distingue, car la perception à ce niveau d'enseignement domine sur le raisonnement. Cependant, ces activités peuvent introduire l'élève au raisonnement, en favorisant la précision du critère de la classification, la justification du résultat trouvé ou de la démarche choisie. Par exemple, la validation du nom du solide reconnu dans les figures obtenues par projection (ou du nombre de figures planes reconnues dans la figure complexe, etc.) peut s'effectuer à partir de la preuve expérimentale : faire la projection (ou montrer, tracer, etc.). Ce caractère *visio-explicatif* du raisonnement peut intervenir ainsi dans la justification du critère de classification par son application à chaque objet proposé à l'observation. Quant à la justification de la démarche, l'élève peut raisonner par analogie. Par exemple, les activités expérimentales à ce niveau doivent chercher à préparer les conditions de transfert de responsabilités d'un travail intellectuel et viser à ce que les élèves retiennent les démarches et les méthodes d'observation, de distinction, de classification pour la résolution des autres situations. Ces processus peuvent devenir pour l'élève des outils de pensée qu'il appliquera à la nouvelle situation (d'observation, de construction, de manipulation, etc.).

L'activité de construction des figures représente une activité géométrique qui évolue au cours des apprentissages et dans laquelle beaucoup de propriétés des figures planes et des savoir-faire géométriques interviennent comme des outils pour guider les élèves vers le développement de nouvelles connaissances et vers la structuration des connaissances qu'ils possèdent déjà. Au niveau *visuel*, l'élève peut représenter la figure par le dessin général (à la main ou à la règle) qui emploie la forme de la figure ou la propriété visuelle marquante (congruence de côtés et angle droit). Les dessins du carré, du rectangle, du triangle rectangle et du triangle isocèle, donc, peuvent être envisagés.

Quant à la résolution de problèmes, elle doit mettre en jeu la reconnaissance et l'évocation de la forme des faces, de projections, de tracés des solides à partir de l'observation ou de la description, ainsi que l'identification des figures dans leurs positions inhabituelles ou dans des figures emboîtées.

Par le tableau suivant (Tableau 2), nous avons représenté les activités expérimentales et les objectifs visés[9] par chacune, portant sur les quadrilatères (dont le carré est un cas particulier) correspondant au niveau *visuel*.

[9] Les objectifs sont indiqués en gras.

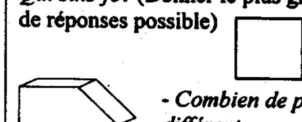
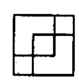
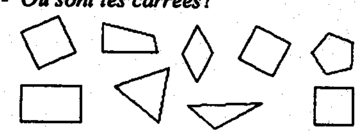
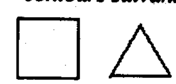
1	*Situations de manipulation*	*Situations d'observation*	*Situations de construction*
Visuel (reconnaissance de la forme)	– **Observer**, toucher et bouger les solides. **Décrire** les solides en les associant aux objets réels, selon la forme de leurs faces, selon les mouvements observés. Regrouper **(classer)** les solides (choix du critère de classification). ***Justification du choix*** (selon la forme de leurs faces (planes et courbes), selon le mouvement (roulent ou glissent), selon l'apparence, etc.). Introduire les noms de solides : *cube, prisme, pyramide, cône, cylindre, boule* et les noms de classes (« polyèdres » et « corps ronds »). **Évoquer** tous les solides ayant la face plane et la surface courbe. – **Observer** les projections de différentes faces des solides (à l'aide d'un projecteur) et **identifier** les figures obtenues. **Décrire** le solide selon la projection de leurs faces. **Évoquer** tous les solides dont une projection a une forme donnée.	– **Observer** la collection des figures planes. **Reconnaître** les figures (où sont les carrés, les triangles, … ?). **Identifier** les figures dans une autre collection. – **Observer** les faces planes des solides. **Décrire** les solides selon la forme de leurs faces planes. **Classer** les solides (choix du critère de classification). ***Justification du choix*** (selon la forme et le nombre de leurs faces : carrées, triangulaires, circulaire, etc.) – **Observer** la collection des figures planes. **Reconnaître** les figures ayant un angle droit. **Identifier** (les triangles rectangles, les carrés et les rectangles).	– **Tracer** les contours des solides (précision des tracés). (Introduire les noms des figures planes : *carré, rectangle, triangle, cercle,* etc.) **Décrire** le solide selon les tracés. **Évoquer** tous les solides ayant un tracé donné. **Trouver** les objets ayant une face de forme carrée (triangulaire, circulaire, etc.) parmi différents objets proposés à l'observation. – **Construire** un carré, un rectangle avec des pailles (nombre et grandeur de pailles, nombre de boules). (Introduire les nouveaux termes : « *côtés* », « *angles* », « *angle droit* ».)
	Résolution de problèmes ***(quelques exemples permettant de mettre en jeu la variété des représentations, les processus mentaux et les démarches géométriques)***		
	- *Toutes mes faces de la même forme. Qui suis-je?* - *J'ai des surfaces carrées et des surfaces triangulaires. Qui suis-je ?* * Donner le plus grand nombre de réponses possibles - *J'ai une seule base de forme carrée. Qui suis-je ?* - *Je ressemble à une boîte, mais je n'ai pas de faces carrées. Je suis …* - *Je peux rouler et glisser. Je n'ai pas de projections de forme triangulaire. Qui suis-je ?*	- *C'est l'une des projections de mes faces. Qui suis-je*? (Donner le plus grand nombre de réponses possible)  - *Combien de projections différentes peut avoir ce solide ? Identifier leurs noms.* - *Est-il possible d'avoir un solide ayant les projections de ses faces de formes carrée et circulaire ? Justifier.* - *Combien y a-t-il de carrés ?* 	- *Où sont les carrées*?  - À partir d'une paille donnée, *combien de carrés différents peut-on construire*? - *Quel solide reconnais-tu selon les contours suivants :* 

Tableau 2. Niveau visuel (Description des activités)

3.2. Niveau descriptif / analytique

Au niveau *descriptif / analytique*, à partir de différentes activités expérimentales, la figure commence à être associée aux éléments qui la composent. À ce niveau, l'enseignement de la géométrie vise l'identification des différentes figures dans différentes positions, selon les caractéristiques visuelles marquantes : côtés (congrus, parallèles, perpendiculaires) et angles (congrus, aigus, droits, obtus), la description de chaque figure par les caractéristiques découvertes et l'évocation (ou la détermination) du nom de la figure selon la description des propriétés ou selon les définitions caractéristiques[10].

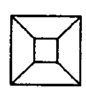
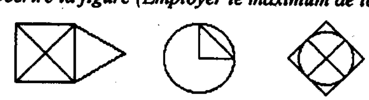
Les activités d'observation de différentes figures planes, leur comparaison et la recherche d'une propriété commune ou qui les distingue (ou d'une figure qui n'appartient pas à la collection) permettent l'introduction des termes « polygones », « polygone concave / convexe », la distinction des différents polygones selon le nombre de leurs côtés, en triangles, quadrilatères, pentagones, etc., et leur emploi dans l'identification et la description des figures. L'observation des relations possibles entre deux droites conduit à l'introduction des termes « *parallèles* », « *concourantes* », « *perpendiculaires* » et au repérage de ces relations pour les droites qui portent les cotés de chaque type de polygones.

Les activités de manipulation des solides, d'observation des différentes vues (de face, de droite, de haut, etc.) et coupes (verticales, horizontales, obliques, passant par le sommet, etc.) favorisent le développement de la visualisation et participent à l'identification des figures planes. Les activités de partage de la figure plane en parties congrues ou en figures connues permettent l'introduction de nouveaux termes : *diagonale, bissectrice, hauteur, figure symétrique* et leur emploi dans la description des figures.

Quant au raisonnement, il continue de garder son caractère *visio-explicatif* en faisant intervenir dans la justification les propriétés acquises. À ce niveau, les propriétés établies expérimentalement (congruence des côtés et des angles, perpendicularité et parallélisme des côtés, présence d'un axe de symétrie, etc.) peuvent déjà constituer un des objets mis en jeu par la construction (ou de la reproduction du dessin), en favorisant la description de la démarche et des techniques de construction (tracer à la règle et au compas, reporter les mesures des côtés et des angles, tracer les droites parallèles et perpendiculaires, les segments congrus, diviser un segment en deux parties congrues...) et l'emploi du raisonnement approprié. À ce niveau, le raisonnement peut intervenir dans la recherche du nombre minimal d'informations permettant la reproduction du dessin reproduit au tableau ou dans la recherche de représentations différentes des polygones avec trois (ou quatre) pailles de même grandeur ou de grandeurs différentes. Nous représentons notre description des activités correspondant à ce niveau dans le Tableau 3.

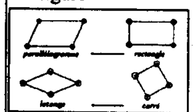
---

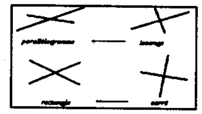
[10] Les définitions *caractéristiques* sont les définitions qui, parmi les propriétés entrant dans la description d'un objet, sélectionnent celle(s) qui permet de l'identifier au moindre coût (Duval, 1995). La propriété utilisée pour la définition est une propriété perceptive marquante et prend valeur de représentant pour tous les objets de cette classe. Par exemple, la propriété d'« *avoir tous les angles droits* » définit la classe des rectangles.

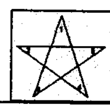
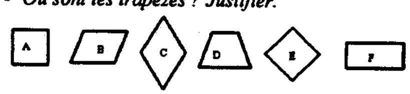
<table>
<tr><th>2</th><th>Situation de manipulation</th><th>Situation d'observation</th><th>Situation de construction</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Descriptif / Analytique</td>
<td>- Observer, identifier, représenter graphiquement les différentes vues : de face, de droite, de haut, etc. (coupes : verticale, horizontale, oblique, passant par le sommet, etc. ; développement) des solides. Évoquer les vues (coupes, figures) de différents solides et les solides ayant la (les) représentation(s) de la vue (coupe) donnée(s).
- Partager la figure plane en deux parties congrues (par pliage) ; (Introduire les notions de réflexion, figure symétrique). Rechercher les axes (passant par les côtés et par les angles) de figures particulières : cercle, triangle isocèle, triangle équilatéral, carré, rectangle, losange. (Introduire les termes : bissectrice et médiatrice). Rechercher le nombre maximal d'axes de ces figures. Décrire la figure selon le nombre d'axes.</td>
<td>- Observer une collection de différentes figures planes (fermées). Comparer et rechercher des propriétés qui les distinguent (ligne courbe et ligne composée de segments de droite). (Introduire le terme « polygone »). Identifier les polygones dans une autre collection de figures planes. Justifier.
- Observer une collection de différents polygones. Comparer et rechercher une propriété qui les distingue (nombre de côtés ou nombre d'angles). (Introduire les noms de classes : triangles, quadrilatères, pentagones, etc.) Identifier les différents polygones dans une autre collection. Justifier.
- Observer une collection de différents quadrilatères. Identifier. Comparer et rechercher une propriété commune (quatre côtés ou quatre angles) et des propriétés qui les distinguent (congruence ou non des côtés, des angles, présence d'angle droit). Décrire chaque quadrilatère.
- Observer une collection de différents quadrilatères. Rechercher une propriété commune (polygone à 4 côtés) et une propriété qui les distingue (angle rentrant). (Introduire les termes « concave » et « convexe »).
- Classifier les polygones selon les différentes caractéristiques : polygones/non-polygones, concaves/convexes, nombre de côtés, côtés parallèles, côtés perpendiculaires, côtés congrus...</td>
<td>- Construire un carré, un rectangle et un triangle rectangle (reproduire le dessin de la figure (report de mesure de côtés, report des angles). Décrire la démarche.
- Construire à partir des données concrètes. Décrire la démarche.
- Rechercher le nombre minimal d'information.
- Prolonger les côtés de différents quadrilatères. Observer les relations entre deux droites. (Introduire les termes « parallèles », « concourantes », « perpendiculaires ».) Identifier les quadrilatères ayant les côtés //, les côtés ⊥
- Composer les différentes figures planes à l'aide des autres figures planes. Décrire la figure selon les différentes compositions. Partager (graphiquement) des figures en figures connues. (Introduire les termes « diagonale », « hauteur »...)
- Construire la figure (ou la deuxième partie de la figure) obtenue par réflexion (papier quadrillé). Décrire la démarche.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Résolution de problèmes (quelques exemples permettant de mettre en jeu la variété des représentations, les processus mentaux et les démarches géom.)</td></tr>
<tr><td>- De quel solide s'agit-il ?

- Suis-je symétrique ?
</td>
<td>- Décrire la figure (Employer le maximum de termes géométriques)

- Trouver la caractéristique commune de ces figures (Donner le plus grand nombre de réponses possibles)
</td>
<td>- Ce triangle représente ¼ du carré. Reconstituer le carré. (Décrire la démarche)

- Construire le quadrilatère convexe, symétrique, ayant ses diagonales congrues et perpendiculaires. Indiquer les propriétés par les symboles correspondants.</td></tr>
</table>

Tableau 3. Niveau descriptif / analytique (Description des activités)

<table>
<tr><th>3</th><th>Situation de manipulation</th><th>Situation d'observation</th><th>Situation de construction</th></tr>
<tr><td>Abstraction / Relation</td>
<td>- Manipulation des modèles physiques permettant de dégager les relations entre les propriétés et entre les figures, de concevoir les définitions lexicales, de rechercher les contre-exemples et d'aborder la question des propriétés suffisantes pour déterminer la figure




- Mesurer les contours de polygones. Dégager des relations pour la mesure des contours de polygones particuliers.
- Dégager la relation pour la mesure de la surface du rectangle. (Activités de dallage de différentes surfaces et de partage graphique des figures en figures connues, permettent de dégager la relation entre le rectangle et le triangle et entre les autres polygones).
*Le même genre d'activités amène à découvrir la mesure du contour et de la surface du disque.
- Dégager (par l'expérimentation) la relation de Pythagore
- Dégager (par l'expérimentation) la relation sur la somme des angles d'un triangle, d'un quadrilatère, etc.</td>
<td>- Observer une collection de carrés et de rectangles. Comparer les figures et identifier une propriété commune (angles droits). (Introduire la classe de rectangles). Classifier les rectangles (inclusion).
- Observer une collection de carrés et de losanges. Comparer les figures et identifier une propriété commune (côtés congrus). (Introduire la classe des losanges). Classifier les losanges (inclusion)
- Observer une collection de carrés, rectangles, losanges et parallélogrammes. Comparer les figures et identifier une propriété commune (2 paires de côtés //). (Introduire la classe des parallélogrammes). Classifier les parallélogrammes (inclusion et hiérarchisation).
- Observer une collection de carrés, rectangles, losanges, parallélogrammes et trapèzes. Comparer les figures et identifier une propriété commune (1paire de côtés //). (Introduire la classe des trapèzes). Classifier les trapèzes (inclusion et hiérarchisation) : choix du diagramme, justification des critères de classification)
- Observer une collection de différents polygones réguliers. Rechercher la propriété commune (congruence des côtés et des angles). Identifier les polygones réguliers dans une nouvelle collection.</td>
<td>- Construire les figures planes selon les données concrètes et abstraites. Décrire la démarche. Rechercher le nombre minimal d'informations permettant la construction d'une figure unique.
- Découvrir les techniques de recherche et de construction du (des) point(s) équidistant(s) d'un point donné (de deux points, de trois points, de deux côtés d'un angle, de trois côtés du triangle), des figures inscrites et circonscrites. Employer les termes : milieu, médiatrice, bissectrice, médiane.
- Observer le changement de la forme d'un parallélogramme. Identifier la propriété qui ne change pas. Formuler les conditions permettant d'obtenir le losange, le rectangle, le carré (en environnement Cabri).
- Construire le développement de différents polyèdres (vérifier les techniques de construction : segments ≅, //, ⊥, report d'angle, etc.)
- Partager le cercle en parties congrues. Dégager la relation entre cercle et polygone régulier. Dégager la relation sur le nombre d'axes de symétrie du polygone régulier.
- Partager (graphiquement) les polygones réguliers en triangles à partir du centre. Observer les angles du polygone régulier. Dégager la relation permettant le calcul d'angle au centre et d'angle au sommet.
- Construire la figure obtenue par réflexion, translation, rotation. Décrire la démarche. Générer les polygones particuliers à l'aide de transformations géométriques.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3"><u>Résolution de problèmes</u> <u>(quelques exemples permettant de mettre en jeu la variété des représentations, les processus mentaux et les démarches géom.)</u></td></tr>
<tr><td></td>
<td>- Un parallélogramme dont les diagonales sont congrues et perpendiculaires est :
☐ un parallélogramme ☐ un losange
☐ un rectangle ☐ un carré
- Quelle est la somme (en degrés) de tous les angles indiqués ?
</td>
<td>- Vrai ou Faux ? Justifier.
Un carré est un parallélogramme ________
Un losange est un carré ________
- Où sont les trapèzes ? Justifier.

</td>
<td>Quelle est l'aire de la partie blanche ?

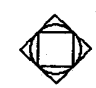
- À partir de la lecture du dessin, faire la liste des énoncés et des relations entre les éléments de la figure
</td></tr>
</table>

Tableau 4. Niveau abstraction / relation (Description des activités)

3.3. Niveau abstraction / relation

Le niveau *abstraction / relation* est visé par l'enseignement de la géométrie à la fin du primaire. À ce niveau, les activités de **manipulation** et d'**observation** participent à l'établissement de rapports entre les propriétés des figures de différentes classes. Quand elles s'appliquent aux quadrilatères par exemple, ces activités cherchent à enrichir le répertoire de représentations (visuelles et verbales), à favoriser le raisonnement dans la conception de nouvelles définitions (à partir des activités correspondantes), la visualisation d'un quadrilatère selon une description inhabituelle de ses propriétés et la recherche de contre-exemple. L'analyse des propriétés partagées par des classes différentes permet de créer la hiérarchisation des classes. À ce niveau, le raisonnement intervient dans la justification des énoncés, le choix des critères et des méthodes, en faisant appel à des concepts et à des processus mathématiques, et porte ainsi davantage un caractère *visio-déductif* (Brousseau, 2000, p.2).

Selon les recherches étudiées, les activités de **classification** permettent de retenir ce qui est essentiel d'un objet, de réduire l'information à ce qui est nécessaire et suffisant pour comprendre et traiter une situation, de structurer les connaissances et de favoriser le développement du raisonnement (Vergnaud, 1990). À partir de telles activités, les différents schémas (de Carroll, à branches et de Venn) et les symboles désignant les objets géométriques peuvent être abordés. Le type de diagramme utilisé dépend de l'objectif de l'activité et du niveau de préparation des élèves. Les diagrammes, selon Vergnaud, peuvent être une aide à la conceptualisation et à la structuration des concepts pendant une période de l'apprentissage et un moyen de vérification des connaissances apprises. Ces activités favorisent la conception de définitions et permettent d'aborder la notion « propriétés suffisantes » pour définir une classe et de « propriétés redondantes » dans une définition. Les activités de dallage, de partage et de composition des figures et les projets de construction permettent la découverte naturelle de relations métriques et de formules.

Au niveau *abstraction / relation,* les activités de construction, par exemple sous forme de résolution de problèmes, cherchent aussi à favoriser la visualisation et l'établissement de relations entre les figures, et l'application de connaissances et de démarches acquises. Ce genre d'activités participe à la coordination entre la représentation et la description et exige l'emploi du raisonnement. À ce niveau d'enseignement, nous pouvons observer comment les propriétés découvertes dans les activités d'observation (relation entre deux droites), de manipulation (avec des objets physiques, de partage et de composition des figures, etc.) peuvent être mises en jeu dans la résolution de problèmes géométriques exigeant la construction. Il s'agit de propriétés visuelles marquantes (côtés congrus ou angles congrus), de diagonales (se coupent en leur milieu, congrues, perpendiculaires, axes de symétrie) et de relations métriques entre les propriétés et entre les figures (rectangles, carrés, triangles rectangles et cercles).

La résolution de problèmes à ce niveau d'enseignement cherche à mettre en jeu (ou à vérifier) les différentes connaissances acquises lors des activités expérimentales, et favorise leur coordination par la reconnaissance (ou l'évocation) des éléments nécessaires à la résolution et par le choix (et l'emploi) des concepts correspondants. Dans le tableau qui suit (Tableau 4), nous présentons une brève description des activités correspondant au niveau *abstraction / relation*, analysées dans cette section.

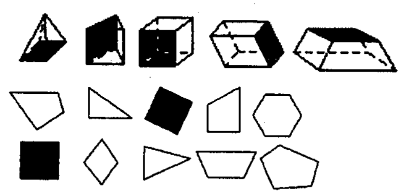
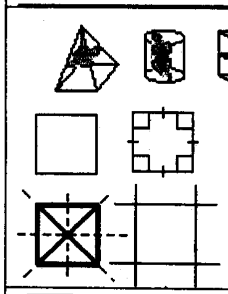
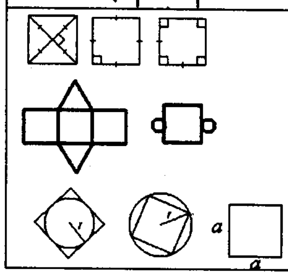
Registre des figures (représentations graphiques)	*Registre discursif (représentations discursives construites à partir des activités expérimentales)*		
	Situations de manipulation	***Situations d'observation***	***Situations de construction***
	*- La forme des projections des faces d'un cube, de différents prismes, de la base d'un prisme ou d'une pyramide, d'un cylindre...*	*- La forme des faces d'un cube, de différents prismes, de la base d'un prisme ou d'une pyramide*	*- La forme du contour des faces d'un cube ou de différents prismes, de la base d'un prisme ou d'une pyramide* *- Le carré se compose de quatre pailles de longueur égale (appelées côtés) et de quatre « beaux » coins (appelés angles droits)*
	*- Le carré peut représenter la vue de face (coupe verticale) de différents prismes, d'un cylindre, du haut d'un prisme à base carrée (coupe horizontale), d'une pyramide à base carrée, les différentes vues de prismes tronqués...* *- Le carré possède 4 axes de symétrie* *- Les diagonales du carré sont des axes de symétrie et des bissectrices* *- Les médiatrices des côtés du carré sont des axes de symétrie*	*- Le carré est un polygone (figure plane fermée composée de segments de droite)* *- Le carré est un quadrilatère (polygone à 4 côtés ou à 4 angles)* *- Le carré est un quadrilatère ayant tous ses côtés congrus et ses angles droits (**définition caractéristique**)* *- Le carré est un quadrilatère convexe*	*- La carré peut être construit à partir d'une donnée (côté) par la démarche suivante : segment, segment ⊥ et ≅, répéter, relier les segments.* *- Le carré possède deux paires de côtés // (2 à 2), les côtés consécutifs sont ⊥* *- Le carré est divisé en 2 triangles rectangles isocèles (congrus) par sa diagonale, et en 4 triangles rectangles isocèles (congrus) par ses deux diagonales.*
	*- Le carré est un rectangle ayant des côtés congrus (**définition conceptuo-lexicale**)* *- Le carré est un losange ayant des angles droits (**définition conceptuo-lexicale**)* *- Les diagonales du carré se coupent en leur milieu, sont ≅ et sont ⊥* *- $P = 4a$* *- $A = a^2$*	*- Le carré est un rectangle (4 angles droits), un losange (4 côtés congrus), un parallélogramme (2 paires de côtés //), un trapèze (une paire de côtés //)* *- Le carré est un polygone régulier (côtés ≅ et angles ≅)*	*- Le carré peut constituer les éléments du développement d'un cube, les éléments du développement de différents prismes, d'une pyramide à base carrée, d'un cylindre* *- Le carré (comme tout polygone régulier) peut être inscrit dans un cercle ou circonscrit à un cercle* *- Le carré peut être construit à partir d'une seule donnée (côté, diagonale, P, A, rayon du cercle inscrit ou circonscrit)*

Tableau 5. Construction du concept de « carré »

À partir de l'exemple donné, nous pouvons observer comment progresse la construction du concept de carré, comment s'élabore le réseau de concepts et quel rôle jouent les activités expérimentales dans cette progression.

4. CONCLUSION

Dans cette présentation, nous avons cherché à montrer « *la manière d'aborder les concepts et processus mathématiques* » et son évolution du primaire au secondaire. Il s'agit de la coordination de différents types d'activités géométriques participant au développement de la pensée géométrique et à la construction d'un cadre de référence (un ensemble de ressources : voir le Tableau 5) qui permettra aux élèves le passage naturel au niveau cognitif de la déduction (niveau 4 du modèle de van Hiele, 1986).

Nous avons pris quelques problèmes géométriques tirés de l'enseignement secondaire (1re et 2^{e} années) pour dégager les connaissances géométriques mises en jeu. Dans le tableau suivant (Tableau 6), nous décrivons ces connaissances en les faisant correspondre aux activités géométriques de l'enseignement primaire dans lesquelles ces connaissances ont été découvertes et travaillées.

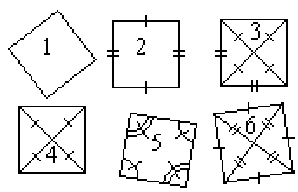
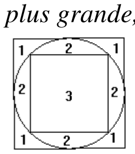
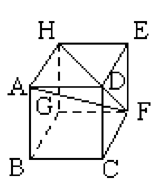
Problèmes	**Connaissances en jeu**	**Référence à l'activité**
1. Déterminer le quadrilatère  (L'explicitation des propriétés qui en permettent l'identification)	- Reconnaître les propriétés marquées par des symboles, - Déterminer des conséquences logiques de certaines données - Déterminer le quadrilatère selon la description des propriétés (Réponses : 1- quadrilatère, 2- parallélogramme 3- carré, 4- rectangle, 5- parallélogramme, 6- carré)	Situations de manipulation, d'observation et de construction (niveau 3) Résolution de problèmes (niveaux 2 et 3)
2. *Est-il possible de construire un quadrilatère ayant ses diagonales congrues et perpendiculaires, et qui ne soit pas un carré ? Justifier votre réponse.*	- Visualiser les différentes positions de deux segments concourants qui représentent les diagonales du quadrilatère. - Rechercher un contre-exemple. - Déterminer le quadrilatère selon la description de ses propriétés.	
3. *L'aire de quelle surface est la plus grande, 1 ou 2 ?* 	- Visualiser les éléments de la figure : grand carré, cercle et petit carré. - Déterminer les rapports entre le rayon du cercle, le côté d'un grand carré et la diagonale d'un petit carré. - Décrire la solution en utilisant des paramètres abstraits.	Situations de manipulation, de construction et de résolution de problèmes (niveaux 2 et 3)
4. *Voici la représentation d'un cube dont l'arête mesure 2 cm. Trouver le périmètre et l'aire du triangle AHF.* 	- Visualiser la coupe oblique du cube - Reconnaître que la diagonale divise le rectangle en deux triangles congrus - Déterminer la nature du triangle et les relations entre les propriétés du triangle et du cube - Employer la relation de Pythagore (recherche de la mesure du côté HF et de l'hypoténuse AF) - Se référer aux concepts de périmètre et d'aire du triangle	Situations de manipulation, d'observation et de construction (niveaux 2 et 3) Résolution de problèmes (niveaux 2 et 3)

Tableau 6. Quelques problèmes géométriques en 1re et 2^{e} secondaires

BIBLIOGRAPHIE

BARBIN, É. (2002). L'ordre naturel des choses de la géométrie. *Actes du Colloque en l'honneur de Nicolas ROUCHE, Épistémologie et enseignement des mathématiques*. Louvain-la-Neuve, Belgique.

BERTHELOT, R. et SALIN, M.-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse de Doctorat d'État, Université de Bordeaux I.

BISHOP, A. J. (1989). Review of visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11 (1), pp. 7-16.

BROUSSEAU, G. (2000). Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire : l'étude de l'espace et de la géométrie [En ligne].
http://dipmat.math.unipa.it/~grim/brousseau_geometrie_03.pdf. Page consultée le 15 mai 2002.

BROWN, S. I., COONEY, T. J. & JONES, D. (1990). Mathematics teacher education. In *Handbook of Research on Teacher Education*, pp. 639-657. W. R. Houston, éd. Macmillan, New York.

BURTON, J., DETHEUX-JEHIN, M. et FAGNANT, A. (1997). *Comment les enseignants évaluent-ils la géométrie au premier degré secondaire ?* Service de Pédagogie expérimentale de l'Université de Liège, Belgique.

CLEMENTS, D. & BATTISTA, M. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. In *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. D. Grouws, éd. Macmillan, New York.

DUVAL, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : registre sémiotique et apprentissages intellectuels*. Éditions Peter Lang, Berne, Suisse.

FENNEMA, E. & FRANKE, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In *Handbook of Research on Mathematics Teaching and learning*, pp. 147-164. D. Grouws, éd. Macmillan, New York.

FUYS, D., GEDDES, D. & TISCHLER, R. (1988). The van Hiele Model of Thinking in Geometry Among Adolescents. In *Journal for Research in Mathematics Education Monograph*, 3. National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginie.

GRAEBER, A., TIROSH, D. & GLOVER, R. (1986). Preservice teachers' beliefs and performance on measurement and partitive division problems. In *Proceedings of the Eighth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 262-267. G. Lappan & R. Even, éds. Michigan State University, East Lansing, Michigan.

HERSHKOVITZ, R. (1989). Visualization in geometry – Two sides of the coin. *Focus on learning problems in mathematics*, vol. 11, pp. 61-76.

LABORDE, C. (1988). L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploration de phénomènes didactiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9 (3), pp. 337-364.

MAYBERRY, J. (1983). The Van Hiele levels of geometry thought in undergraduate preservice teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14, pp. 50-59.

PAUL, R. & ELDER, T. L. (2001). *Critical Thinking – Tools for Taking Charge of Your Learning and Your Life*. Prentice Hall, New Jersey.

PORTER, A. (1989). A curriculum out of balance. The abc of elementary school mathematics. *Educational Researcher*, 18, pp. 9-15.

VAN HIELE, P. M. (1959/1985). The child's thought and geometry, In *English translation of selected writing of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele*, pp. 243-252. D. Fuys, D. Geddes & R. Tischler, éds. Brooklyn College, School of Education (ERIC Document reproduction Service n° 289 697), Brooklyn, New York.

VAN HIELE, P. M. (1986). *Structure and insight.* Academic Press, Orlando, Floride.

VAN HIELE, P. M. (1987). A method to facilitate the finding of levels of thinking in geometry by using the levels in arithmetic. *Paper presented at learning and teaching geometry issues for research and practice working conference*. Syracuse University, Syracuse, état de New York.

VERGNAUD, G. (1990). Développement et fonctionnement cognitifs dans le champ conceptuel des structures additives. In *Développement et fonctionnement cognitifs*, pp. 261-277. G. Netchine-Grynberg, éd. Presses universitaires de France, Paris.

VERGNAUD, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10 (2-3), pp. 133-170.

VERGNAUD, G. (2001). Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance. *Actes du colloque GDM 2001*, Montréal.

WIRSZUP, I. (1976). Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry. In *Space and geometry. Papers from a research workshop*, pp. 75-97. J. L. Martin & D. A. Bradbard, éds. Georgia Center for the Study of Learning and Teaching Mathematics, University of Georgia, Athens, Georgia. (ERIC Document Reproduction Service n° 132 033).

YAKIMANSKAYA, I. S. (1971). The development of spatial concepts and their role in the mastery of elementary geometric knowledge, In *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics*, Vol.5, pp. 145-168. R. Kilpatrik & I. Wirszup, éds. University of Chicago.

helena.b@videotron.ca

Intégration des figures dynamiques dans l'expression écrite du raisonnement mathématique

PHILIPPE R. RICHARD

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

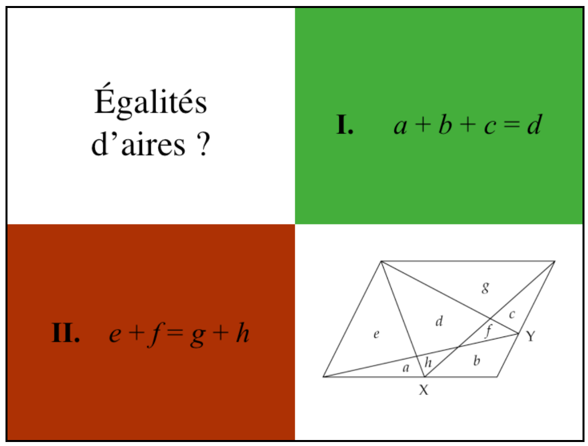
RÉSUMÉ. Avec l'interactivité et la représentation du mouvement, les logiciels de géométrie dynamique engendrent de nouvelles possibilités dans la représentation des figures. On peut alors se demander quels sont les rapports qu'entretiennent les figures dynamiques en résolution de problèmes ou dans la réalisation de preuves mathématiques. Nous présentons une recherche, issue de la didactique des mathématiques, qui montre comment l'élève de l'école secondaire intègre ce type de figure dans l'expression écrite de ses raisonnements. Nous introduisons quelques repères théoriques sur la représentation des figures et l'expression du raisonnement lorsque l'exercice s'effectue conjointement à l'interface du logiciel Cabri-géomètre et de l'environnement papier-crayon.

INTRODUCTION

Il peut sembler curieux de parler de figures dynamiques dans l'expression écrite puisqu'il n'y a rien de plus statique qu'une figure représentée sur papier. On peut même se demander pourquoi, si l'on dispose d'un logiciel de géométrie dynamique, faudrait-il chercher à représenter une figure sur papier alors que les possibilités représentatives du logiciel sont beaucoup plus vastes. Pourtant, malgré les avantages incontournables de ce type de logiciel, la représentation sur papier continue d'être utile à l'élève pour l'appropriation d'une connaissance, la responsabilité de la représentation lui appartenant de façon beaucoup plus intime : la médiation par les outils de dessin traditionnels l'oblige à s'investir dans toute la démarche. Car la représentation d'une figure, qui ne se limite ni à une reproduction d'un support (écran) à un autre (papier), ni à une conversion entre registres (du discours aux figures), s'inscrit dans un processus de communication qui sous-tend la mise en œuvre d'un raisonnement. Il y aura un éventuel lecteur, ne serait-ce que l'auteur lui-même, ce qui laisse entendre que le dynamisme apparaît par le raisonnement dans un processus communicationnel (par ex. Richard et Sierpinska, 2004). De plus, si la représentation graphique sur papier accompagne la réalisation d'une preuve discursive, cela pose la question de l'intégration de figures dynamiques dans l'expression écrite du raisonnement mathématique.

FIGURE ET RAISONNEMENT

Dans un problème de géométrie classique qui ne montre pas de dessin, le processus de résolution commence habituellement par la construction d'une figure qui prétend, du moins qui ambitionne, représenter fidèlement la situation. La construction traduit une action raisonnée, à moins qu'il ne s'agisse d'une seule conversion d'énoncés discursifs (texte) en énoncés graphiques (dessin). On interprète ensuite la figure en fonction de l'objectif du moment, ce qui permet de fonder un raisonnement par coordination de l'information issue du texte et du dessin. On peut alors communiquer la résolution du problème en rédigeant une solution discursive avec, éventuellement, l'ajout de dessins au texte. Et si l'on pouvait compter sur un tiers susceptible de dialoguer, voire de diriger l'action, le cheminement s'inscrirait non seulement dans une démarche argumentative, mais il serait plus facile d'accepter qu'une partie du raisonnement ou des concepts mobilisés n'aient pas à se convertir discursivement. En fait, dans l'ensemble du processus de résolution, il s'installe une dynamique subtile entre le raisonnement, le dessin, le discours, les concepts et leurs propriétés, sans oublier le mode d'action et les particularités de la situation. Illustrons cette dynamique en prenant comme toile de fond le problème des égalités d'aires dans un parallélogramme (diapositive 1), tout en suivant le fil conducteur des rapports entre la figure et le raisonnement.



Diapositive 1. Problème de l'égalité d'aires dans un parallélogramme, tiré de Richard (2003)

Étant donné deux points quelconques X et Y qui appartiennent à deux côtés consécutifs d'un parallélogramme, on demande de trouver ou d'établir — autrement qu'en posant des équations algébriques ou des fonctions d'aires — les égalités d'aires $a+b+c=d$ et $e+f=g+h$ dans le découpage proposé. L'activité consiste d'abord à découvrir ces égalités par résolution dirigée du problème dans un Environnement Informatique d'Apprentissage Humain (EIAH). Il s'agit ensuite de démontrer ces égalités dans l'Environnement Papier-Crayon (EPC), de façon à dégager certains liens entre le dynamisme évident de l'EIAH et le statisme apparent de l'EPC. Bien que, dans une intention didactique, la *situation de validation* dans l'EPC pourrait parfaitement suivre la *résolution du problème* dans l'EIAH, il n'y a pas de telle relation dans notre exposé. Nous cherchons plutôt à comparer les caractéristiques du raisonnement dans chaque environnement en utilisant le même problème pour alimenter la continuité thématique. De plus, contrairement à la section suivante qui montre « ce que l'élève sait faire » dans un contexte analogue, la résolution du problème est ici virtuelle. Tout comme la situation de validation se modèle en fait sur une preuve existante.

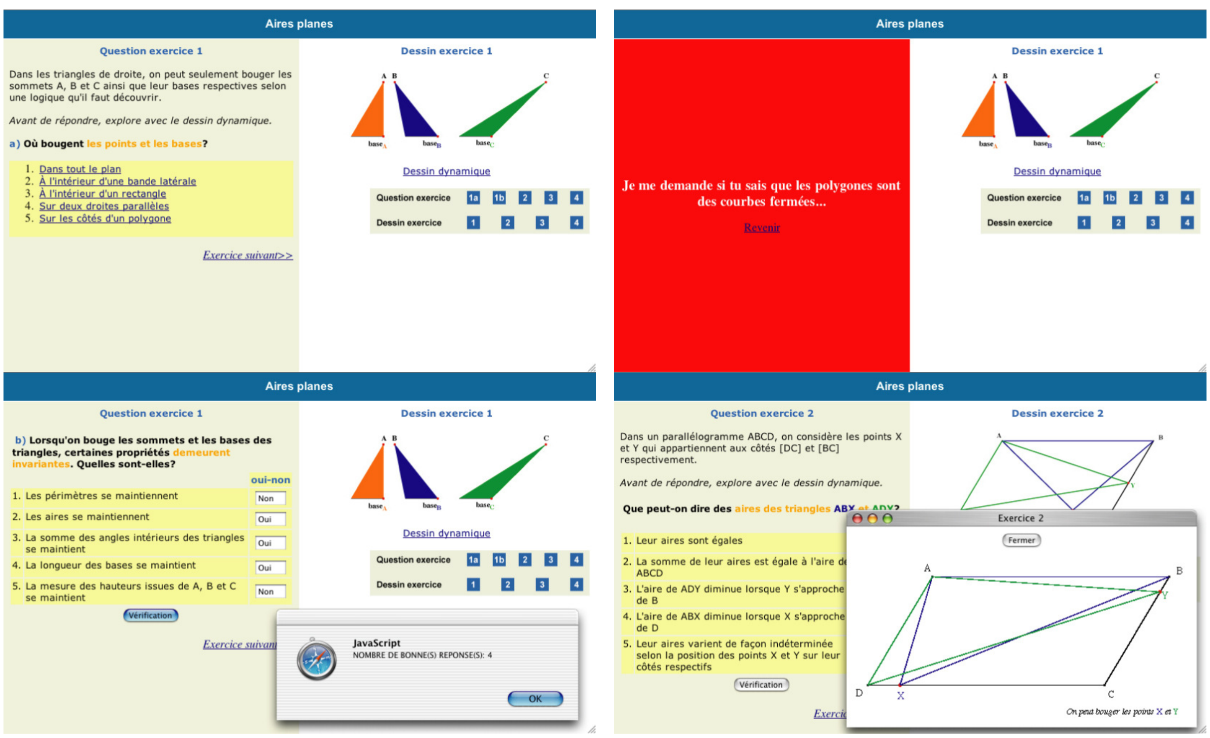
Dans notre EIAH[1] (séquence 2), le raisonnement est omniprésent et multiforme. Il s'inscrit dans un processus d'argumentation simulée au cours duquel le système répond à

[1] La version interactive du problème est disponible à http://www.edu365.com/aulanet/intermates/index.htm sous l'onglet « voir et regarder ».

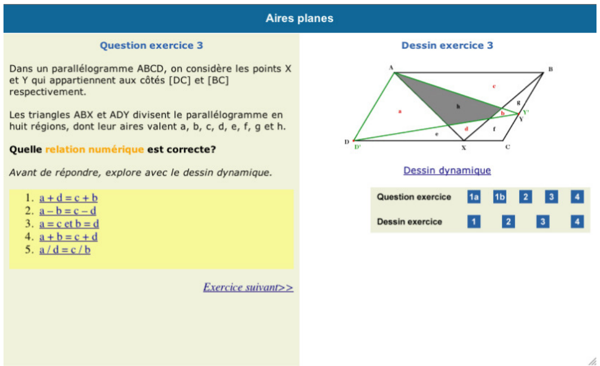
l'action de l'élève à l'aide de messages ou de fenêtres de dialogue. Dès l'exercice 1, après la lecture de la situation, l'élève est forcé d'utiliser un dessin dynamique[2] pour reconnaître certaines propriétés qui demeurent invariantes sous les contraintes programmées. Il faut d'abord découvrir le lieu où bougent les points *A*, *B*, *C* et leur base respective (question 1a), avant de se convaincre ou de vérifier les conjectures proposées (question 1b). Le système ne demande pas à l'élève d'expliciter discursivement pourquoi il en est arrivé à statuer sur l'une ou l'autre des conjectures, mais on peut supposer, si ses décisions ne sont pas arbitraires, qu'il a dû raisonner en partie dans l'action :

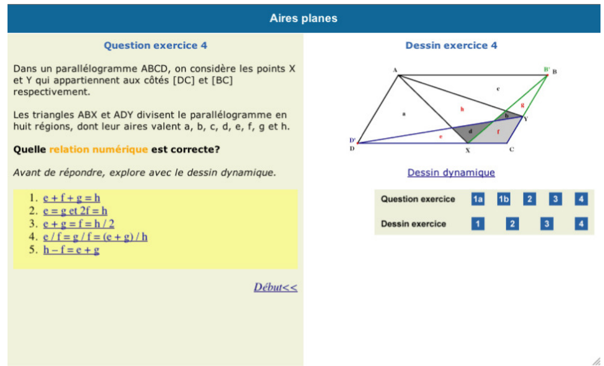
> *Sous le terme raisonnement on désigne aussi les démarches inhérentes à n'importe quel acte d'exploration : on procède par anticipations en sélectionnant celles qui sont confirmées. Ces démarches, sollicitées par toute adaptation à une situation nouvelle, ne sont pas intrinsèquement liées à l'utilisation d'un langage : les problèmes qu'une manipulation d'objets ou d'instruments, sans aucun recours à une verbalisation, suffit à résoudre mobilisent spontanément ces démarches d'exploration.* Duval (1995).

Si le raisonnement s'exprime par l'action et le discours, il s'articule également avec les signes graphiques ; peut-être même plus qu'on pourrait penser a priori. D'ailleurs, dans la communication entre l'élève et l'interface, la partie discursive du raisonnement se ramène pratiquement à la lecture du texte ou des messages. Il faut alors poser la question du raisonnement en termes d'action et de dessins. L'action qui nous intéresse n'est pas le geste en soi, c'est-à-dire le geste physique, mais le geste signifiant qui participe à l'exploration (par ex. pointer ou sélectionner un objet à l'aide de la souris, cliquer sur un lien, appuyer sur un bouton ou déplacer le curseur suivant une trajectoire).



[2] Il s'agit d'un Applet Cabri Java qui n'est pas montré à la séquence 2, mais qui est disponible en cliquant sur le lien « dessin dynamique ». Celui-ci apparaît dans une nouvelle fenêtre, comme on peut le voir au 4e cliché.

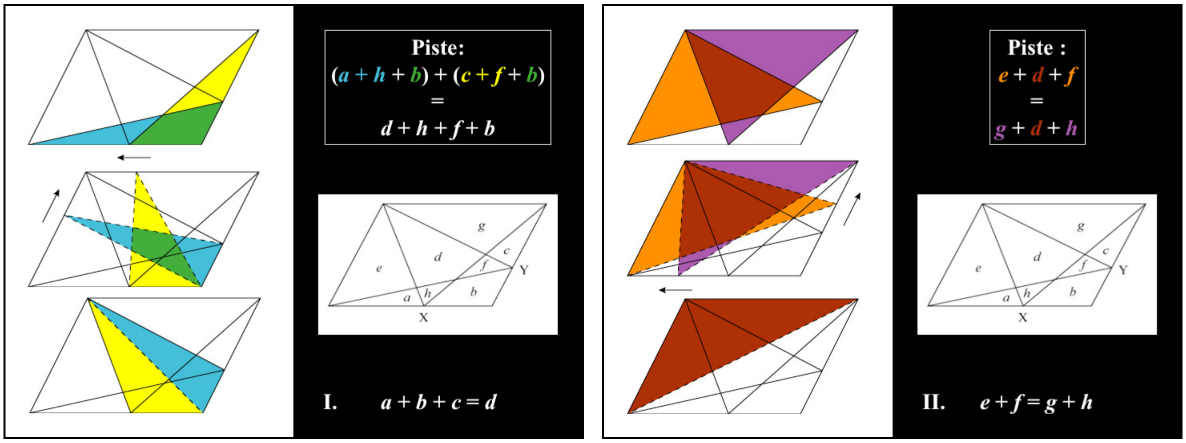




Séquence 2. Résolution dirigée du problème du parallélogramme dans un EIAH. En posant un problème par étapes (questions 1 à 4), on impose d'emblée une certaine structure à l'éventuel raisonnement tout en imprimant une direction à la stratégie de résolution. De plus, chaque question intègre un dessin dynamique sur lequel on peut explorer quelques cas de figure autorisés par le mouvement, en agissant et en lisant sur ce dessin ; comme le raisonnement qui se traduit en bougeant les points X et Y sur les côtés $[DC]$ et $[BC]$ pour constater que les triangles ABX et ADY ont invariablement la même aire (4e cliché). Par ailleurs, le système retourne des messages à la suite de certaines actions attendues, comme cliquer sur un lien hypertexte ou remplir les champs de formulaire. Bien qu'il soit rudimentaire, on peut y voir une sorte de processus argumentatif dans lequel le système, après qu'on ait choisi « sur les côtés d'un polygone », par exemple, répond par « je me demande si tu sais que les polygones sont des courbes fermées... » (2e cliché), ou, après qu'on ait sollicité une vérification de nos « oui » ou « non », retourne le nombre de bonnes réponses à l'aide d'une fenêtre de dialogue (3e cliché).

Toutefois, il y a un écart de taille entre le raisonnement qui se traduit par l'action et le raisonnement qui se fonde sur les dessins. Pour souligner cette différence et parce que, cette-fois, l'action y est réduite à sa plus simple expression, nous allons maintenant passer à l'EPC. En exagérant à peine, on pourrait se mettre les mains dans le dos et raisonner exclusivement avec les dessins, sans besoin d'instrument d'écriture, pas même de discours. En outre, la rationalité mise en œuvre est susceptible de s'appliquer pareillement à la résolution des questions 3 et 4 (voir séquence 2).

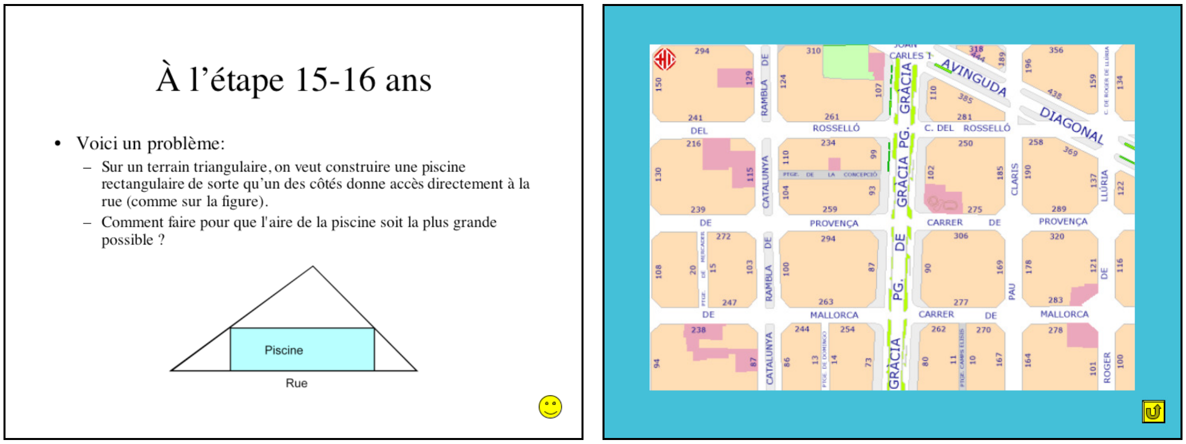
Les bandes dessinées qui se trouvent aux diapositives 3 et 4 constituent des « preuves sans mots » de chaque égalité (au sens employé par Nelsen, 1993, 2000). Elles s'expriment uniquement à l'aide de signes graphiques, nonobstant les lettres pour désigner les points et les régions. Pour emporter la conviction, le lecteur (bâillonné, les mains dans le dos et volontaire…) n'a pas d'autre choix que de simuler la transformation de figures, comparer des régions ou additionner des aires. Il raisonne à partir des dessins sans que ni l'action, ni le discours ne participent au raisonnement. Bien entendu, le discours existe déjà chez l'élève au niveau de la représentation interne des concepts mobilisés et il pourrait apparaître (silencieusement) dans une partie du traitement cognitif. Ne serait-ce, par exemple, lorsque l'élève conclut en se disant que « l'aire du quadrilatère est égale à la somme des aires des deux triangles moins une fois la partie commune ». Mais il pourrait également déboucher sur la même conclusion en comparant ce qu'il voit avec ses yeux, c'est-à-dire la relation de signification entre le signe graphique et ce que ce signe est censé représenter, sans nécessairement avoir besoin de traiter conjointement avec le discours.



Diapositives 3 et 4. Preuve sans mots de chaque égalité d'aire du problème du parallélogramme dans un EPC. Les preuves par transformation de triangles utilisent le développement d'images mentales dynamiques, contrôlé par la reconnaissance de l'invariabilité de l'aire des triangles lorsque leur base et leur hauteur demeurent congrues. L'acceptation des preuves (présentées sous forme de bande dessinée) exige la comparaison des états finaux et initiaux de chaque développement. Lors de notre exposé, nous avons facilité l'ordre d'appréhension des régions en fournissant une égalité algébrique complémentaire. Cependant, dans la version originale (Richard, 2003), il n'y a pas de telle piste. C'est au lecteur qu'incombe la responsabilité d'articuler convenablement les régions en raisonnant graphiquement sur les dessins.

Nous croyons que c'est en misant sur le raisonnement graphique que de nombreuses conjectures peuvent à la fois se découvrir et se prouver en géométrie, même encore de nos jours, comme avec les « intersections » de Walser (2004), où l'auteur dégage des points de concours dans de nombreuses situations géométriques uniquement à partir de dessins[3]. Il y aurait donc moyen de « dynamiser » l'EPC à l'aide du développement de figures intermédiaires, pour peu que le lecteur accepte de simuler le mouvement et qu'il soit habitué à raisonner à partir de signes graphiques. Cependant, dans un contexte d'enseignement-apprentissage en classe de géométrie, force est de constater qu'on n'entraîne pas souvent l'élève à la résolution de problème pour lequel la représentation du mouvement participe au processus de résolution. Même si l'usage régulier de calculatrices graphiques ou de logiciels de géométrie dynamique soutient visiblement ce type de représentation, il ne s'agit pas tant d'une question d'accessibilité technologique que de communication ; parce que la difficulté qui est au cœur de l'exercice consiste à savoir communiquer un raisonnement graphique, surtout lorsque celui-ci a pu naître par action-rétroaction à l'interface de dispositifs électroniques. L'exercice est-il à la porté de l'élève de l'école secondaire ?

[3] Nous savons que l'auteur voulait publier un « ouvrage sans mots », mais que l'éditeur l'a obligé à écrire deux chapitres discursifs, qui sont quand même bien illustrés.

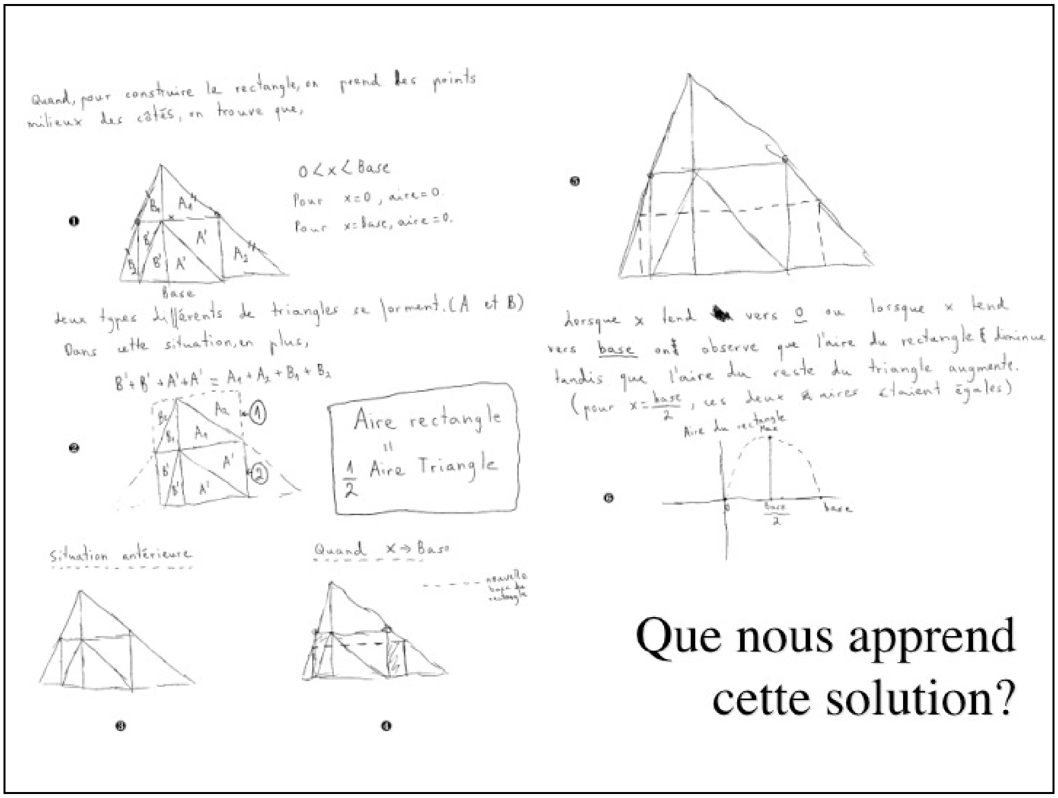


Diapositives 5 et 6. Problème de la piscine, inspiré de Richard (2004a). Les éléments de la situation-problème se trouvent à la diapositive 5, tandis que la diapositive 6 montre un terrain triangulaire où la situation pourrait bien se produire (tout en haut, près du milieu à gauche).

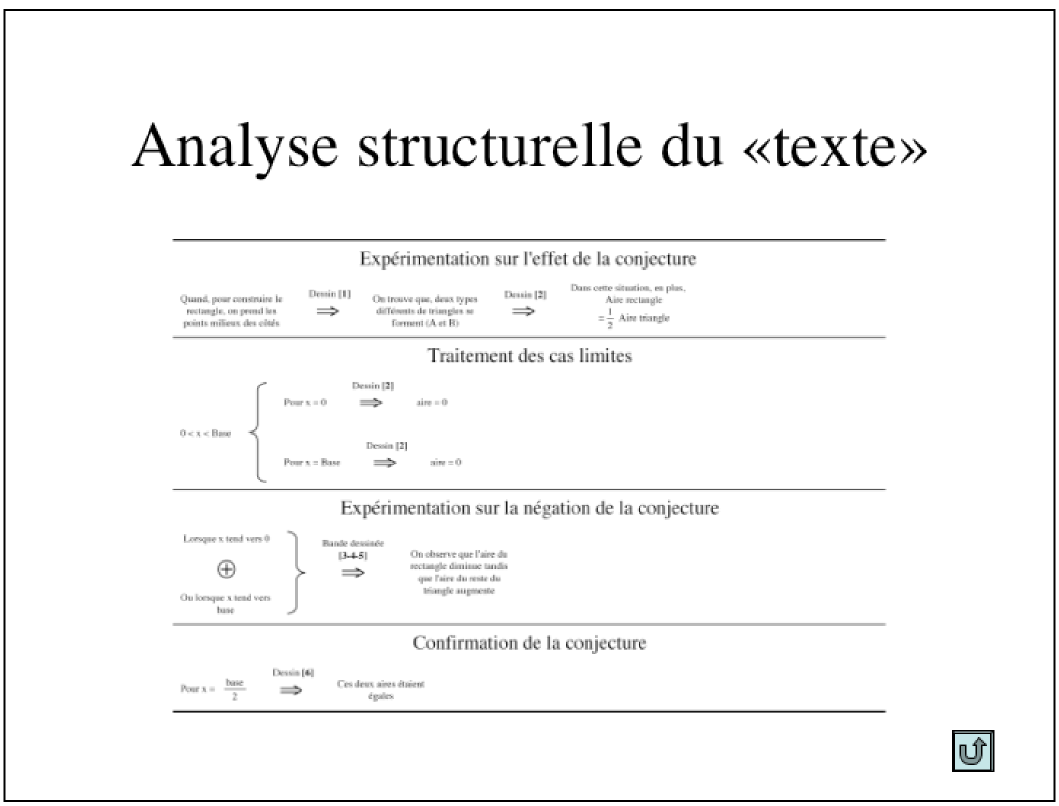
PERSPECTIVE DIDACTIQUE : CE QUE L'ÉLÈVE SAIT FAIRE

Donner son avis sur le domaine du possible dans l'apprentissage humain passe toujours pour une thèse osée. On connaît par exemple le point de vue de l'enseignant dont les objectifs avoués visent ce qu'il considère être à la porté de « l'élève moyen ». L'enseignant sait bien que l'élève moyen n'existe pas comme individu : il considère la classe comme une entité distincte des élèves qui la composent, mais qui marquent absolument le domaine des connaissances envisageables. En poussant les choses à l'extrême, on peut y voir une sorte de complaisance pour une réalité que l'on qualifie volontiers de « moyenne ». Pas question d'enseigner au-delà de cette « moyenne » car, de toutes façons, la classe « ne saurait pas faire ». Pourtant, si l'on considère les compétences de l'élève par contraste avec celles de l'expert, quitte à les transposer à la réalité scolaire, on ouvre plutôt le domaine du possible. Faut-il rappeler que les élèves ne cessent d'étonner dès qu'on les oblige à faire face à des situations tout à fait nouvelles, peu habituelles par rapport à l'enseignement reçu ou qui comportent des obstacles communément jugés hors de portée ? C'est dans cet esprit que nous avons demandé à des élèves de l'école secondaire de résoudre le problème de la piscine, problème d'optimisation de l'aire d'un rectangle inscrit dans un triangle quelconque (diapositives 5 et 6).

Contrairement aux situations illustrées à la section précédente, la résolution du problème combinait une demande de preuve à la formulation d'une conjecture. De façon plus précise, après la construction d'un dessin dynamique dans la fenêtre du logiciel Cabri-géomètre, l'élève devait expérimenter sur celui-là afin de trouver une conjecture primitive, la confirmer ou la réfuter, en utilisant éventuellement du papier brouillon. Ensuite, il devait rédiger au propre une preuve, pour défendre la première conjecture qu'il jugeait « suffisamment sûre ». À la diapositive 7, nous reproduisons une solution d'élève, afin de dégager certaines caractéristiques de « ce qu'il sait faire ».



Diapositive 7



Diapositive 8

Diapositives 7 et 8. Exemple de solution d'élève au problème de la piscine (diapositive 7) et analyse de la structure de la solution (diapositive 8). Le raisonnement qui s'en dégage se forme à partir de six inférences qui intègrent des dessins à la continuité du texte. On peut grouper ces inférences selon le rôle qu'elles jouent dans la preuve : expérimentation sur l'effet de la conjecture (inférences produites avec les dessins 1 et 2), traitement des cas limites (idem dessin 1), expérimentation sur la négation de la conjecture (idem bande dessinée 3-4-5) et confirmation de la conjecture (idem dessin 6). Seuls les dessins permettent de justifier l'enchaînement des propositions discursives du raisonnement, ce qui détermine implicitement la nature d'une inférence figurale.

On remarque tout de suite l'importance que l'élève accorde aux dessins dans son « texte ». Il commence sa solution en considérant les sommets supérieurs du rectangle au milieu des côtés du triangle pour dégager, dans ce cas de figure, que l'aire du rectangle vaut la moitié de celle du triangle. L'élève ne montre pas de calculs dans sa solution. À l'interface Cabri-géomètre, il n'a jamais mesuré de distance, de longueur ni d'aire. Il ne s'est pas servi non plus du papier brouillon. Tout son raisonnement d'alors s'exprimait par l'action, les signes graphiques du dessin à l'écran et peut-être même, par le discours demeuré toutefois implicite. Ce dessin était isomorphe au premier dessin de sa solution, sans marques graphiques ni symboles de désignation, comme l'usage des mêmes coches ou des mêmes lettres pour indiquer des figures congrues. Le processus de rédaction tente donc de communiquer un raisonnement qui provient, ne serait-ce que partiellement, du souvenir de son expérimentation sur le dessin à l'écran. Si nous employons le mot « partiellement », ce n'est pas seulement parce que la mise en texte exige de traduire ou de convertir une action avec des graphies discursives ou figurales, et que l'exercice d'écriture risque de perdre dans la représentation des connaissances, mais parce que le processus de rédaction lui-même possède des contraintes communicationnelles, le texte se destinant à être lu. Autrement dit, dans le jeu d'écriture-relecture, l'élève doit autant s'assurer que les signes graphiques sont compréhensibles pour l'éventuel lecteur, que leur disposition et leur intégration au « texte » engendrent une solution convaincante. S'il n'est pas étonnant de constater la nécessité des dessins, c'est parce que ce sont eux qui structurent l'ensemble du raisonnement qui se dégage de la solution (diapositive 8). De fait, si on masquait les dessins, il serait impossible de comprendre l'idée de la preuve, encore moins de l'accepter.

Regardons de plus près comment l'élève s'y prend pour simuler le mouvement dans l'EPC. Avant d'établir que l'aire du rectangle vaut la moitié de celle du triangle, l'élève commence avec ce qu'on appelle en mathématique le traitement des cas limites. Il accompagne de propositions un premier dessin qui supporte ce qui se passe avec l'aire du rectangle lorsque celui-ci dégénère en segments (« pour $x = 0$, aire = 0 » et « pour $x = \text{Base}$, aire = 0 »). Ainsi, le lecteur qui lit ces propositions peut imaginer, à partir du dessin, un mouvement de va-et-vient pour « $0 > x > \text{Base}$ », comme s'il agissait à l'interface Cabri-géomètre. Autrement dit, pour comprendre et accepter que l'aire est nulle dans ces cas de figure, surtout en l'absence de considérations analytiques explicites, le lecteur est pratiquement obligé de développer des images mentales qui bougent.[4] Ensuite,

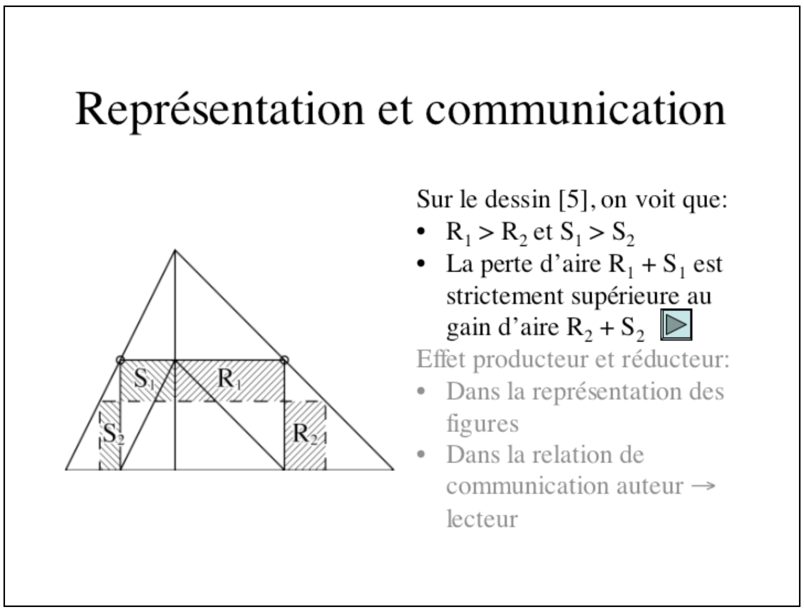
[4] Pour « voir » un rectangle qui bouge, le lecteur peut devoir mobiliser sa propre activité musculaire pour favoriser le développement des images mentales. Par exemple, à l'aide de son index, le lecteur déplace virtuellement le sommet supérieur gauche du rectangle sur le côté gauche du triangle, comme si c'était son bras qui agissait par l'intermédiaire d'une souris imaginaire. L'attention pourrait se centrer essentiellement sur la dégénérescence du rectangle en segments, laissant à l'évidence visuelle (mentale) la gestion de la

l'élève établit l'égalité « aire rectangle = $\frac{1}{2}$ aire triangle » en proposant une reconstruction du premier dessin. Il reporte les triangles « B_2 » et « A_2 » de façon à former deux rectangles de même aire, laissant au lecteur le soin de compléter l'intention avec l'idée « si, dans le triangle, l'aire du rectangle est égale à l'aire de son complémentaire, alors l'aire du rectangle vaut la moitié de l'aire du triangle ». En fait, si l'on peut établir l'égalité précédente, c'est parce l'élève indique au lecteur quel doit être l'ordre d'appréhension des sous-figures — ce que Duval (1995) appelle le déroulement de l'appréhension opératoire des modifications possibles d'une même figure géométrique —, en lui demandant de coordonner l'information figurale et discursive pertinente. C'est-à-dire que pour accepter l'établissement de l'égalité « aire rectangle = $\frac{1}{2}$ aire triangle », il faut que le lecteur rapproche, aux signes graphiques du dessin, l'égalité « $B' + B' + A' + A' = A_1 + A_2 + B_1 + B_2$ » et les symboles de désignation ① et ②. Du point de vue structurel, l'élève se sert du dessin comme justification d'une inférence que nous appelons « inférence figurale » (Richard, 2004a, b).

Alors que les deux premiers dessins servent à expérimenter sur l'effet de la conjecture, les trois dessins suivants visent l'effet de la négation de la conjecture. Autrement dit, après avoir établit que « aire rectangle = $\frac{1}{2}$ aire triangle » lorsque « l'on prend les points milieux des côtés », l'élève veut expérimenter sur ce qui se passe pour « $x \rightarrow$ Base ». Afin de justifier que « l'on observe que l'aire du rectangle diminue tandis l'aire du reste du triangle augmente », il introduit une séquence de figures (bande dessinée) — de façon analogue aux transformations de la preuve sans mots montrée à la section *Figure et raisonnement* — qui retient des « moments significatifs » issus de son expérimentation à l'interface. C'est-à-dire que l'élève développe l'idée de son raisonnement à partir des signes graphiques des dessins, démarche que nous désignons par « expansion graphique » (Richard, 2004b). Encore une fois, il tente de communiquer un raisonnement qui provient en tout ou en partie du souvenir de l'expérimentation sur le dessin à l'écran. Cependant, la tâche ici est plus difficile. Si les deux premiers dessins de la séquence montrent deux « moments significatifs », le troisième dessin est un agrandissement du second. En fait, l'élève est aux prises à la fois avec un problème de représentation et de communication. Car pour que le lecteur puisse constater visuellement que l'aire du rectangle diminue tandis que l'aire du reste du triangle augmente, il a besoin d'exhiber un dessin suffisamment grand pour favoriser l'appréhension opératoire

préservation du caractère rectangle de la figure animée lors du développement des images mentales. Cette disposition, voisine du moment où c'est Cabri-géomètre qui assume implicitement cette gestion, est valable à moins que le lecteur ait besoin de contrôler conjointement, par le raisonnement, pourquoi le rectangle continue d'en être un. On peut également mobiliser ses pouces et ses index pour « prendre » un rectangle élastique qu'on distend au besoin. Comparativement à l'exemple précédent, le développement des images mentales est davantage lié à l'activité musculaire car il n'y a pas de médiation par un instrument imaginaire. Bien que le lecteur s'approprie ainsi le rectangle de façon plus intime, cela n'implique pas qu'il a su contrôler par le raisonnement la préservation du caractère rectangle de la figure « distendue ». Au contraire, le fait de « tenir » le rectangle avec ses doigts est tout aussi susceptible d'entretenir la confusion entre l'image visuelle qui bouge et ce qu'elle est censée représenter. Dans chaque exemple, le raisonnement peut être discursif (par ex. « voyons voir, c'est toujours un rectangle parce qu'il a été construit avec quatre angles droits », graphique (par ex., on perçoit que c'est encore un rectangle en maintenant l'usage des symboles graphiques de la perpendicularité) ou se réaliser par une combinaison des deux (par ex., on voit les signes graphiques de deux angles droits pour conclure que « les côtés du 'rectangle' sont parallèles »).

(diapositive 9). Mais il ne semble pas sûr d'avoir réussi à montrer comment on peut lire ce dessin. Peut-être même qu'il considère que son argument est trop visuel, sans référence explicite à un idéal géométrique, ou qu'il exige trop du lecteur. N'ayant pas accès à l'expérimentation sur le dessin à l'écran, le lecteur devrait raisonner graphiquement d'un dessin à l'autre, sur le cas de figure considéré (« $x \rightarrow$ Base ») puis généraliser sur ce qui se passe pour « $x \rightarrow 0$ ». Cela pourrait également expliquer pourquoi l'élève ajoute, tout à la fin, un argument inattendu par rapport au reste de la solution. Il introduit la représentation graphique d'une fonction quadratique, non pas uniquement dans le but de confirmer sa conjecture — le sommet de la parabole est le maximum cherché —, mais aussi pour justifier l'absence d'un traitement lorsque « $x \rightarrow 0$ » : les paraboles sont symétriques.



Diapositive 9. Intention de l'élève par rapport au cinquième dessin

QUELQUES REPÈRES THÉORIQUES

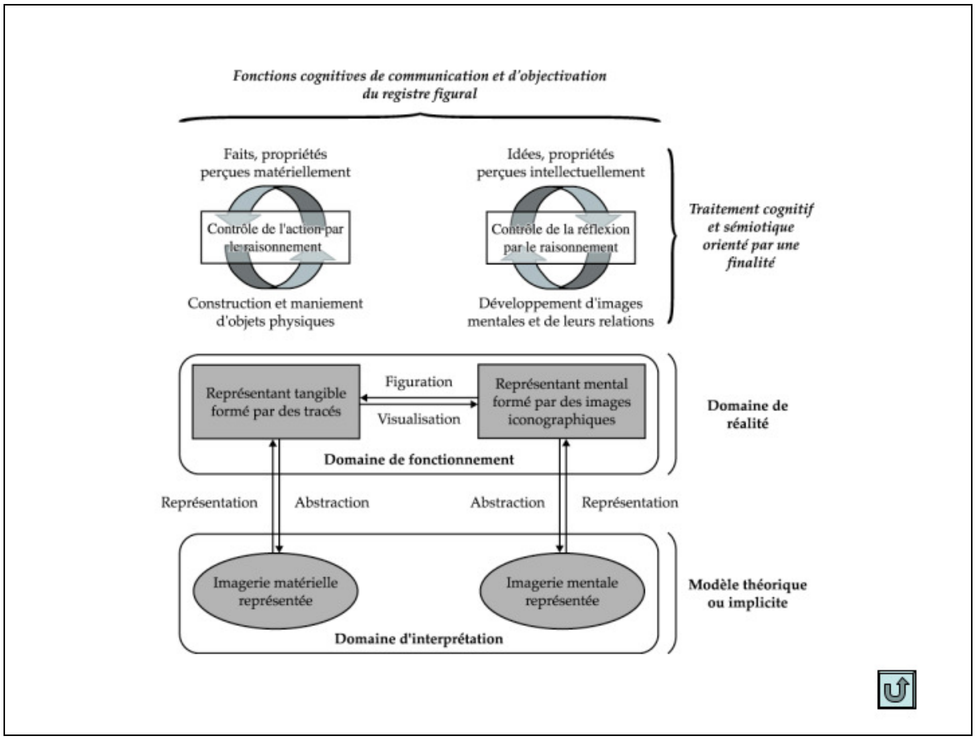
Raisonnement non-verbal

Tout comme la représentation graphique est à la fois une démarche et un résultat, il faut distinguer, dans le raisonnement, le processus lui-même (forme d'expansion) de son expression (représentation). En outre, si le raisonnement se destine à être communiqué, il faut distinguer le processus d'articulation de l'auteur du processus d'interprétation du lecteur ; ou de l'interlocuteur dans le cas d'une argumentation. On sait bien que le raisonnement qui porte sur des figures géométriques s'exprime par l'écrit, l'oral, la gestuelle ou l'action médiée par un instrument ou une machine. Mais dans le cas de l'action, il n'est pas toujours facile de connaître la partie qui, justement, traduit un raisonnement, comme s'il s'agissait proprement d'une forme « d'expansion d'actions signifiantes ». Contrairement au raisonnement verbal qui se développe uniquement par expansion discursive, le raisonnement non-verbal peut aussi se développer par expansion graphique.[5] Mettons à nouveau en contraste les deux types de raisonnement non-verbal dans la construction d'un dessin et d'une macro à l'interface Cabri-géomètre. Dans ce qui suit, nous supposerons qu'il faut construire les rectangles NAPO et LEON. Même si le discours fait déjà partie de la représentation des connaissances et qu'il pourrait éventuellement se combiner aux signes graphiques, il est possible de construire NAPO sans avoir besoin de verbaliser quoi que ce soit. Même qu'au début de la construction, on pourrait avoir en tête l'image mentale d'un représentant iconographique (diapositive 10), que ce soit l'image pictographique d'un rectangle (représentation figurative) ou sa représentation avec quatre petits carrés situés dans chaque coin (représentation symbolique). Ainsi, l'articulation des signes graphiques représentés à l'interface suivrait une logique de construction (raisonnement) par expansion graphique :

> *On trace d'abord le segment [ON] pour tracer ensuite la perpendiculaire à (ON) passant par O. Après, on place le point P sur cette droite et on trace la perpendiculaire à (OP) passant par P parce qu'on sait (cognitivement, par comparaison à une image mentale ou par anticipation à un protocole d'actions connues) que deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre elles. On continue de la sorte jusqu'à la représentation complète du rectangle NAPO.*

Telle une phrase discursive qui raccorde des mots, des syntagmes ou des propositions pour rendre un sens complet, les signes graphiques raccordent des signes élémentaires en syntagmes graphiques, en propositions graphiques puis en assemblages de propositions graphiques pour rendre un sens figural complet. Dans l'exemple précédent, le tracé d'un segment pour représenter une droite est un signe élémentaire, le petit carré posé à l'intersection de deux segments perpendiculaires pour signifier deux droites perpendiculaires est un syntagme graphique, le dessin du rectangle NAPO est une proposition graphique et le dessin des rectangles NAPO et LEON, une fois complété, est un assemblage de propositions graphiques.

[5] La forme d'expansion discursive est séquentielle dans le temps et dans l'espace, mais celle de l'expansion graphique ou de « l'expansion d'actions signifiantes » n'est que séquentielle dans le temps. Comme nous l'avons montré à la section précédente, cela cause généralement un problème au lecteur qui voudrait connaître l'ordre d'appréhension des signes graphiques pertinents. D'ailleurs, si l'on posait la question « comment lire cette figure ? », il faudrait se demander en même temps « que dois-je faire avec elle ? ». De plus, si l'expression du raisonnement est séquentielle, il ne faut pas oublier, pour reprendre la métaphore de l'académicien Pierre Loti (1891), que « la pensée embrasse l'infinie simultanéité des faits ».



Diapositive 10. Figure géométrique opératoire qui se constitue à partir d'actes (matériels ou intellectuels) qui supposent la réflexion et la combinaison de moyens relatifs aux concepts et aux procédures sous-jacentes, en vue d'obtenir un résultat sémiotique, cognitif et situationnel déterminés (Richard, 2004a). Par rapport à la figure géométrique opératoire, le représentant mental est un support de la figure.

Pour construire LEON, il est avantageux de songer à l'emploi d'une macro-construction, technique qui s'apparente au développement d'un lemme en mathématique. On construit une macro une seule fois pour y avoir recours ultérieurement comme raccourci dans une étape de construction, comme on démontre un lemme une seule fois pour l'invoquer ultérieurement comme justification dans une déduction. Même si la définition d'une macro se fonde sur un raisonnement déjà consommé, la sélection séquentielle du segment [ON] (objet initial) et de la macro elle-même (disons le bouton « construire un rectangle à partir d'une base ») pour produire le rectangle LEON (objet final), procède par « expansion d'actions signifiantes ». Toutefois, dans cet exemple, c'est le logiciel qui représente le rectangle, non pas dans l'action, mais par rétroaction. Par contre, du point de vue de la rationalité sous-jacente, surtout si c'est l'auteur de la macro qui y a recours, on peut considérer qu'il anticipe la figure construite lorsqu'il sélectionne les objets initiaux appropriés.

Raisonnement discursivo-graphique

Dans l'expression écrite du raisonnement mathématique, l'action s'éteint. Il n'y a pas d'interlocuteur et le texte doit, d'une certaine façon, se suffire à lui-même. On sait bien que celui qui écrit s'adresse généralement à un tiers imaginaire, sorte de lecteur modèle, ce qui oriente à sa manière le style de la rédaction et la profondeur que l'on veut bien accorder au raisonnement. L'auteur et le lecteur partagent des connaissances voisines, du moins des connaissances rarement communes et, ce qui devient fréquent dans la relation didactique, ils peuvent se solidariser dans un même contexte de production. Ainsi, l'étude du texte d'élève de notre exposé a certainement été facilitée par le fait que non seulement, c'est nous qui avons décidé de la situation-problème, mais nous avons également assisté à l'expérimentation à l'interface Cabri-géomètre tout en nous réservant la possibilité de questionner l'élève au terme de sa solution. Néanmoins, l'analyse structurelle du « texte » proposée à la diapositive 8 part d'un texte achevé dont on prétend relever « ce qui va de soi » par abstraction au contexte de production. Nous utilisons plutôt notre connaissance du contexte pour mieux situer les problèmes de communication (effets producteur et réducteur) que pose l'intégration de dessins dans le corps de la preuve. Précisons maintenant comment les signes graphiques et les mots du texte se rattachent pour structurer le raisonnement.

Toutes les étapes du raisonnement suivent le même patron. L'élève part d'une ou de plusieurs propositions discursives pour en inférer au moins une autre en utilisant, comme justification, les propositions graphiques d'un dessin. Il s'agit d'inférences figurales. Si, pour l'auteur, la forme d'expansion discursivo-graphique est séquentielle dans le temps et non dans l'espace, alors l'acceptation de l'inférence passe d'abord par la reconnaissance du raisonnement graphique véhiculé par le dessin. Cela suppose une certaine habileté dans le développement (représentation et traitement) d'images mentales dynamiques, ainsi que dans la visualisation et l'interprétation des signes graphiques. Ensuite, l'acceptation de l'inférence passe par l'évaluation de la convenance des propositions graphiques appropriées dans leur rapprochement aux propositions discursives qui suscitent ou qui procèdent de l'inférence, ce qui renvoie à la coordination entre les registres discursif et figural. La question de l'intégration des figures dynamiques dans l'expression écrite du raisonnement dépend certes de l'expressivité de ces registres, mais aussi de l'aptitude du lecteur pour la sélection des propositions graphiques appropriées. Cet usage répété de l'expression « sélectionner des (…) approprié(e)s » n'est pas du tout fortuit. Bien plus qu'un clin d'œil à l'idée « d'expansion d'actions signifiantes », nous voulons souligner que le raisonnement non-verbal est plus exigeant pour le lecteur que le raisonnement discursif. Le lecteur doit s'investir dans la démarche au-delà de la mobilisation d'un réseau de significations ou, s'il y a lieu, de sa capacité à effectuer des calculs formels. Bien que l'usage de dessins gagne en concision sur le plan de l'expression, le lecteur doit s'employer à gérer une sorte d'exploration du dessin, avant même de pouvoir accepter l'inférence. En outre, s'il s'agissait d'intégrer un dessin dynamique au texte, l'exploration serait susceptible d'associer une activité musculaire qui, sans être spécifique au registre figural, rendrait encore plus apparente l'interpénétration entre l'expansion graphique et « l'expansion d'actions signifiantes ».

CONCLUSION

Notre propos part de deux constats. En premier lieu, le développement des « mathématiques » ou des « preuves sans mots » depuis plusieurs années montre qu'il est possible de représenter des figures dynamiques sur papier pour peu que le lecteur soit familier avec le type de raisonnement véhiculé par le registre des figures. Ce raisonnement, que nous appelons « raisonnement graphique », procède par appréhension opératoire et par expansion graphique à partir des signes graphiques mobilisés. Le lecteur peut avoir à coordonner un traitement entre des graphies algébriques et des signes graphiques, mais dans ce cas, le registre algébrique ne sert qu'à décrire un moment significatif difficile à exprimer uniquement par des signes graphiques. En second lieu, à partir d'une recherche issue de la didactique des mathématiques, nous montrons comment l'élève de l'école secondaire arrive à structurer une preuve écrite à l'aide de dessins ou de séquences de dessins. La sémiotique du texte de sa solution dévoile un pas de raisonnement (inférence figurale) qui procède conjointement par le discours et les signes graphiques (raisonnement discursivo-graphique).

L'intégration de figures dynamiques dans l'expression écrite du raisonnement mathématique est un exercice difficile, parfois non concluant. Si l'on reprend l'idée des « preuves sans mots », il faut souligner que celles-ci sont généralement le fruit d'experts qui rapportent ainsi un magnifique travail de synthèse, mais qui ne révèlent rien sur les nombreux enjeux de leur travail d'analyse. Nonobstant la question de la compétence beaucoup plus fragile du novice, nous retenons que, comparativement au discours, les figures cachent le raisonnement que ses signes sont censés articuler. Malgré un avantage marqué pour la concision de l'expression, les « dessins » n'indiquent pas au lecteur comment s'organisent les signes graphiques pour représenter le dynamisme ou pour comprendre la justification d'inférences. Toutefois, faut-il le souligner, la linéarité sémiotique du discours est tout aussi susceptible de constituer un obstacle lorsque le discours paraît comme la seule solution de remplacement. Si, pour convaincre un tiers sur le bien-fondé d'une conjecture, il faut systématiquement chercher un raisonnement discursif substitutif, l'auteur peut être dévié de l'objectif de son raisonnement ou en perdre de vue les idées charnières.

Puisqu'ils permettent l'animation des figures, la manipulation de leurs parties et la création de macros, les logiciels de géométrie dynamique ont engendré certains déséquilibres par rapport aux habitudes de communication en classe de mathématique, comme s'ils appuyaient davantage sur le raisonnement qui s'exprime dans l'action, au détriment du raisonnement discursif traditionnel. Évidemment, tout dépend de la compétence discursivo-graphique des élèves et des caractéristiques du dispositif didactique dans lequel on les engage. Mais la relation étroite qui existe entre les figures dynamiques, le dynamisme du raisonnement et les possibilités communicatives de l'expression du raisonnement invite à chercher quel est le genre de situation didactique qui peut exiger une sorte de réconciliation entre l'environnement papier-crayon et les environnements informatiques, voire interactifs, d'apprentissage humain. À notre avis, le débat d'opposition entre l'EPC et les EIAH est illusoire, ne serait-ce que parce que l'écrit continue d'être une « mémoire de travail », permettant de reformuler des problèmes ou d'en poser de nouveaux, même lorsqu'on agit à l'interface d'un logiciel comme Cabri-géomètre. Ce que l'ordinateur remet en question n'est pas la démarche de l'écriture, mais le potentiel de la représentation. Plus que l'écrit, c'est l'alphabet et ses contraintes d'usage, auxquelles nous nous sommes habitués au point de les croire inévitables, que l'ordinateur remet en cause. Et cela, au profit de la représentation et de l'écrit même.

BIBLIOGRAPHIE

DUVAL, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : registre sémiotique et apprentissages intellectuels*. Éditions Peter Lang, Berne, Suisse.

NELSEN, R. B. (1993). *Proofs Without Words. Exercices in Visual Thinking*. The Mathematical Association of America, Washington.

NELSEN, R. B. (2000). *Proofs Without Words II. More Exercices in Visual Thinking*. The Mathematical Association of America, Washington.

RICHARD, P. R. (2003). Proof Without Words : Equal Areas in a Partition of a Parallelogram. *Mathematics Magazine,* 76 (5), p. 348.

RICHARD, P. R. (2004a). *Raisonnement et stratégies de preuve dans l'enseignement des mathématiques*. Éditions Peter Lang, Berne, Suisse.

RICHARD, P. R. (2004b). L'inférence figurale : un pas de raisonnement discursivo-graphique. *Educational Studies in Mathematics,* 57 (2), pp. 229–263.

RICHARD, P. R. et SIERPINSKA, A. (2004). Étude fonctionnelle-structurelle de deux extraits de manuels anciens de géométrie. In *Le langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques,* pp. 661-692. G. Lemoyne et C. Sackur, rédactrices invitées. *Revue des sciences de l'éducation, Numéro thématique,* 30 (1).

WALSER, H. (2004). *Schnittpunkte*. Eagle-Einblicke, Leipzig, Allemagne.

philippe.r.richard@umontreal.ca

L'évaluation de la compétence à résoudre des problèmes en mathématiques : vers des problèmes favorisant le raisonnement

PHILIPPE LABROSSE

ÉCOLE SECONDAIRE DANIEL-JOHNSON

RÉSUMÉ. L'article qui suit découle de notre insatisfaction face aux moyens d'évaluation en place dans les écoles secondaires. Ces moyens nous semblent mal prendre en compte la progression des élèves. Aussi, la démarche de résolution de problèmes nous apparaît être reléguée au second plan, la réponse étant bien souvent le principal indicateur de la réussite d'un problème et non pas le raisonnement sous-jacent à la résolution. Le recours au portfolio, comme outil d'évaluation de la résolution de problèmes, est issu de cette insatisfaction. L'expérimentation dont il est question dans cet article s'est déroulée auprès de 56 élèves (enrichis et réguliers) de première secondaire, qui ont été confrontés à diverses activités de formulations et de résolutions de problèmes. Des grilles, élaborées par nous à partir de critères issus des composantes de la compétence à résoudre des problèmes, ont été utilisées pour évaluer trois formulations et quatre résolutions de problèmes, en lien avec le programme de première secondaire. Notre analyse des traces des élèves a permis de cibler des situations plus riches, favorisant le développement des composantes de la compétence à résoudre des problèmes.

INTRODUCTION

L'arrivée de nouveaux programmes d'études en mathématiques dans les écoles secondaires au Québec (MEQ, 2003) met à nouveau la résolution de problèmes en avant-scène. Les finalités du programme y sont définies en termes de développement de compétences disciplinaires, parmi lesquelles figure la *compétence à résoudre une situation-problème*, et ce en lien avec d'autres compétences, telles celles de *raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques*, et de *communiquer à l'aide du langage mathématique*.

Une expérimentation réalisée auprès de différents groupes d'élèves de 1re secondaire, s'appuyant sur l'utilisation d'un portfolio, cherche à rendre compte du développement de la compétence à résoudre des problèmes en mathématiques chez les élèves. Par la même occasion, elle cherche à mettre en évidence des situations favorisant le développement et la diversité des raisonnements mathématiques chez l'élève. Par les activités proposées dans le cadre de l'expérimentation, il nous a été possible de cibler des problèmes encourageant l'argumentation et le recours à plusieurs stratégies de résolution.

Cette expérimentation, qui a eu lieu dans les classes dont l'auteur était l'enseignant attitré, résulte de l'insatisfaction de l'auteur face aux moyens d'évaluation en place dans les écoles secondaires. Ces moyens semblent mal prendre en compte la progression des élèves, notamment la démarche de résolution de problèmes, qui apparaît reléguée au second plan, la réponse étant bien souvent le principal indicateur de la réussite d'un problème.

Nous situerons tout d'abord l'idée sous-jacente à l'utilisation du portfolio en résolution de problèmes à des fins d'évaluation, en le situant globalement dans le contexte actuel de la réforme des programmes d'études et des nouvelles formes d'évaluation. Par la suite, nous présenterons rapidement les différentes parties du portfolio élaborées par nous, en insistant davantage sur la troisième section. Nous reviendrons ensuite sur un problème spécifique, le « Problème de la balance », qui favorise plusieurs types de raisonnements chez l'élève. À cet effet, nous présenterons les stratégies mises en oeuvre dans la résolution de ce problème. Finalement, nous conclurons en présentant quelques résultats issus de la recherche[1].

1. DIFFÉRENTES FORMES D'ÉVALUATION EN ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Notre expérience d'enseignant nous permet d'observer que les moyens d'évaluation en mathématiques, utilisés dans les écoles secondaires, n'évoluent pas beaucoup. Les évaluations du type papier-crayon, sous forme d'examens formatifs ou sommatifs, restent encore les moyens les plus usités[2]. Ces évaluations demeurent ponctuelles et ne permettent pas toujours à l'enseignant de voir la progression de ses élèves. Elles visent le plus souvent l'évaluation des connaissances des élèves et non le développement de compétences. Or, cette orientation nouvelle oblige à revoir les méthodes d'évaluation.

En effet, le concept de compétence renvoie, pour le Ministère de l'Éducation, à un savoir-agir fondé sur la mobilisation et l'utilisation de ressources (MEQ, 2003). Par cette idée de savoir-agir, la « compétence devient indissociable des contextes dans lesquels elle se manifeste et des situations qu'elle permet de traiter » (Jonnaert, 2002, p 35). Les notions de ressources et de situation deviennent donc des éléments clés dans l'évaluation de la compétence.

Plusieurs enseignants du primaire, là où les nouveaux programmes d'études sont déjà en place, expérimentent dans cette perspective de nouvelles formes d'évaluation[3]. Le nouveau programme de mathématiques, en regard de la réforme, décrit l'évaluation comme suit :

> *Pour être conforme à l'orientation du programme, l'évaluation doit porter sur le degré de développement des compétences mathématiques considérées dans leur globalité. Elle doit ainsi renseigner sur le niveau de maîtrise des processus, du langage propre à la discipline, des concepts et de leurs réseaux de propriétés. L'évaluation du contenu de formation est importante, la connaissance des préalables notionnels étant indispensable à l'élargissement des réseaux de concepts et au raffinement des processus* (MEQ, 2003, p. 238).

---

[1] Le propos de cet article n'est pas de rendre compte de la recherche, mais davantage de présenter l'outil élaboré à des fins d'évaluation en situant brièvement son potentiel et ses limites. Pour plus de détails, il est possible de consulter les résultats de la recherche dans Labrosse (2004).

[2] Ces examens ont bien sûr un intérêt pour situer l'élève à un moment donné, s'ils sont construits de manière adéquate, sur la base d'analyses préalables du contenu couvert. Ils peuvent alors être riches d'informations sur les stratégies des élèves, leurs erreurs, leurs difficultés. La conception d'examens et leur correction ne suivent toutefois pas toujours ce processus.

[3] Par exemple, des situations-problèmes complexes, dont la passation s'étale sur une longue période, ont été mises au point récemment pour le 3^{e} cycle du primaire par le MEQ, autour de thématiques choisies. Le portfolio fait partie des outils d'évaluation qui ont été repris par plusieurs enseignants du primaire.

Plusieurs éléments sont à prendre en compte dans ce changement à l'égard des pratiques d'évaluation, outre le défi que pose l'évaluation du développement de compétences par les élèves. Perrenoud (1997) note que, par rapport à l'évaluation, « un nouvel élargissement se dessine avec l'introduction de cycles d'apprentissages pluriannuels ». L'évaluation n'est plus pensée ici en fonction d'un niveau scolaire donné, mais davantage en fonction de cycles d'enseignement de deux ans, sur une période donc plus étendue. Celle-là va nécessiter une concertation entre les enseignants et un véritable travail d'équipe. De plus,

> […] *la progression de la classe n'est plus le seul souci. Le mouvement vers l'individualisation des parcours de formation et la pédagogie différenciée amènent à penser la progression de chaque élève* (op. cit., p. 25).

Avec des classes de plus en plus nombreuses, on est en droit de se demander comment il sera possible d'individualiser les parcours de formation de chacun des élèves ? Les moyens d'évaluation classiques nous permettent-ils vraiment de bien suivre le parcours d'apprentissage de ces élèves ? Quel défi va poser pour l'enseignant cette gestion différenciée des apprentissages, en termes d'évaluation et de suivi ? Perrenoud mentionne que « pour gérer la progression des apprentissages, on ne peut se passer de *bilans* périodiques des acquis des élèves », en nous mettant toutefois en garde :

> *Il ne suffit pas, toutefois, de vivre longuement avec un élève pour savoir l'observer, ni de l'observer attentivement pour en percevoir clairement les acquis* […]. *Le recours conjoint à un portfolio et à un journal peut faciliter ce travail* (op. cit., p. 27).

Cette observation périodique et continue des élèves n'a pas pour but unique d'amasser des données afin de faire une évaluation sommative. Perrenoud insiste sur l'importance formative de cette observation. Il résume bien sa pensée en précisant que l'évaluation formative

> *… peut aider l'élève à mieux apprendre : de ses acquis, qui conditionnent les tâches qu'on peut lui proposer, aussi bien que de sa façon d'apprendre et de raisonner, de son rapport au savoir, de ses angoisses et blocages éventuels de certains types de tâches, de ce qui fait sens pour lui et le mobilise, de ses intérêts, de ses projets, de son image de soi comme sujet capable d'apprendre, de son environnement scolaire et familial* (op. cit., p. 27).

Dans cette perspective formative, l'enseignant peut, afin de faciliter sa tâche, recourir à divers moyens d'évaluation. Il importe, entre autres :

- qu'il forme ses élèves à l'évaluation mutuelle (Allal et Michel, 1993) ;
- qu'il développe une certaine évaluation formatrice, prise en charge par le sujet apprenant (Nunziati, 1990). L'autoévaluation ne consiste pas à remplir soi-même son carnet, mais à faire preuve d'une forme de lucidité à l'endroit de la façon dont on apprend ;
- qu'il favorise la métacognition (Allal, 1993) comme source d'autorégulation des processus d'apprentissage (Allal et Saada-Robert, 1992 ; Allal, 1984, 1993 a et b).

L'outil retenu par nous dans le cadre de cette expérimentation, le portfolio en résolution de problèmes, va dans le sens des idées développées précédemment. Il cherche à rendre compte, de façon formative, de la progression des élèves à l'égard de la compétence à résoudre des problèmes. Il intègre différents éléments : une évaluation formative faite par l'enseignant à l'aide de grilles que nous avons construites, une autoévaluation par l'élève à partir d'une grille élaborée à cette fin, et une coévaluation par les pairs à partir d'une liste d'observations. Cette évaluation s'intègre à l'enseignement régulier et a été exploitée tout au long de l'année.

2. L'ÉLABORATION DE NOTRE PORTFOLIO[4] : PRÉSENTATION DE SES DIFFÉRENTES PARTIES

Comment est-il possible de rendre compte de la progression et du développement de la compétence en résolution de problèmes de la part des élèves ?

Globalement, le portfolio retenu à cette fin contient cinq parties. La première, plus personnelle, vise à connaître, à la lumière de ce que disent les élèves, leurs intérêts, leurs forces et leurs faiblesses. La deuxième partie est centrée sur la formulation de problèmes par les élèves selon des contraintes spécifiques que nous avons choisies (problème dans lequel il faut formuler la question à partir d'un énoncé, problème à formuler se résolvant par un calcul précis, formulation libre à partir d'un dessin, etc.). La troisième partie est centrée sur la résolution de différents types de problèmes, permettant de travailler des habiletés en résolution de problèmes (élaboration de stratégies, explicitation de celles-ci, justification, etc.). La quatrième partie du portfolio est un recueil d'énigmes et de jeux mathématiques cherchant à amener un aspect ludique et à contrer l'attitude négative des élèves vis-à-vis la résolution de problèmes. La cinquième partie permet à l'élève d'annexer à son portfolio quelques productions réalisées au cours de l'année et dont il est fier, en explicitant son choix. Finalement, les élèves doivent faire un bilan de leur portfolio à l'aide d'un petit questionnaire. Regardons de plus près la troisième partie de notre portfolio, soit celle s'attardant aux résolutions de problèmes par les élèves.

2.1. Troisième section du portfolio : les stratégies de résolution

La troisième partie du portfolio propose aux élèves de porter un regard critique sur leur propre résolution de problèmes. Cette section regroupe des problèmes non routiniers de plusieurs types (problème forçant une réflexion sur les relations entre les données ; problème complexe permettant une prise en compte simultanée de plusieurs relations, problème sans données numériques forçant un raisonnement qualitatif ; problème ouvert donnant lieu à des conjectures, des hypothèses et des essais, problèmes à données manquantes ou superflues ; problème faisant appel à un autre support que le texte écrit en mots ; problème sollicitant certaines conceptions erronées). Ces problèmes et leur exploitation en classe avaient pour but principal de développer la compétence à résoudre des problèmes en permettant :

[4] Mentionnons ici que l'élaboration du portfolio et de ses différentes parties découle d'un projet de recherche mis sur pied en une collaboration entre l'école Daniel-Johnson et le CIRADE. Mesdames Nadine Bednarz et Sophie René de Cotret, chercheurs au CIRADE, ont participé au projet, de même que Mesdames Annie Delisle et Chantal Rousseau, enseignantes à l'école Daniel-Johnson.

- de développer la démarche de présentation d'une solution, sa structuration à des fins de communication destinée à d'autres élèves ;
- de faire découvrir aux élèves plusieurs stratégies de résolution pour un même problème, en leur permettant de conjecturer, de faire des essais, etc. ;
- de porter un regard critique de la part des élèves sur leur propre démarche de résolution, autant en ce qui a trait à la justification, à leur argumentation qu'à la validité de leur stratégie.

Les élèves étaient appelés dans cette section à résoudre plusieurs types de problèmes, entre autres des problèmes complexes forçant une prise en compte simultanée de plusieurs relations (cf. figure 1). Le problème de la balance est un exemple qui va dans ce sens et il nous permettra un peu plus loin de faire place aux différentes stratégies et raisonnements des élèves.

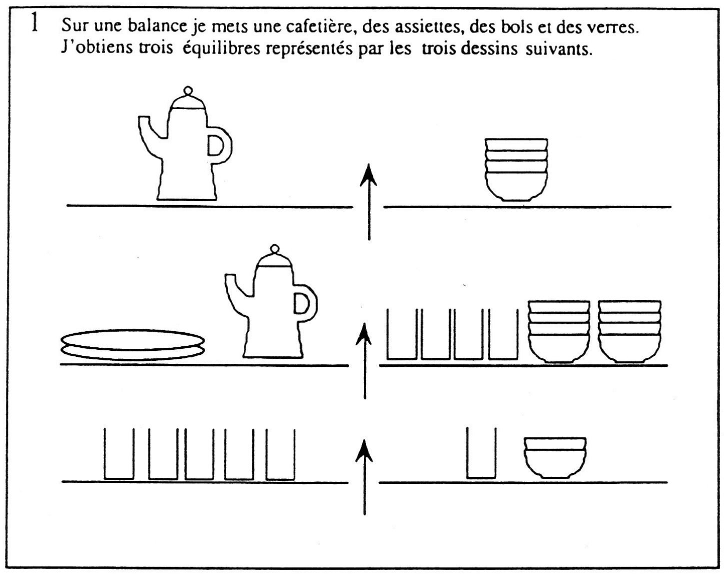


Figure 1. Le Problème de la balance[5]

a) *Peux-tu comparer la masse d'un verre et d'un bol ? Explique clairement ta réponse.*
b) *Peux-tu comparer la masse d'une assiette et d'un bol ? Explique clairement ta réponse.*
c) *Je voudrais faire un équilibre avec des cafetières sur un plateau et des assiettes sur l'autre plateau. Fais le dessin qui représenterait cette situation d'équilibre. Explique clairement ta réponse.*

Ce type de problème force l'élève à prendre simultanément en compte (en b) et en c) tout au moins) plusieurs relations (les différentes équivalences doivent ici être réintégrées). On retrouvait également dans cette section des problèmes sans données numériques,

[5] Problème de la balance, *Petit x*, n°32, 1992-93. Philippe Clapponi, d'après une idée de Serge Cecconi.

forçant un raisonnement qualitatif. C'est le cas par exemple du « Problème des terrains de jeu », que nous énonçons ci-dessous.

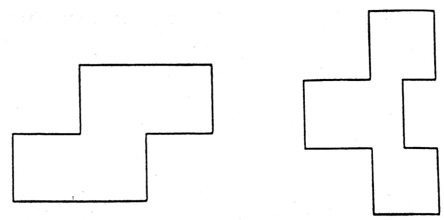


Figure 2. Problème des terrains de jeu[6]

Voici la forme de deux terrains de jeu.

a) *Sans faire de calculs, peux-tu dire sur lequel des terrains il y a le plus d'espace pour jouer ?*
b) *On prépare une piste pour la course à relais autour des 2 terrains. Toujours sans faire de calculs, peux-tu trouver quelle sera la piste la plus longue ?*

Aucune valeur numérique n'étant donnée, ce type de problème force donc l'élève à expliquer sa solution en mots et non par un calcul. Compte tenu de l'idée que les élèves se font souvent d'un problème en mathématiques (associé pour eux à un calcul à faire : cf. Landry, 1999), cette dimension apparaissait importante à développer.

Des problèmes forçant une réflexion sur la structure du problème étaient également proposés aux élèves. Ce type de problème oblige en effet l'élève à faire des liens entre les données de l'énoncé. De plus, il permet de déboucher sur plusieurs stratégies de résolution, qui pourront être partagées avec l'ensemble du groupe lors du retour fait en classe. Le Problème des pommes constitue un exemple qui va dans ce sens :

Trois boîtes contenaient chacune le même nombre de pommes. Après avoir retiré 125 pommes au total de ces trois boîtes pour la vente, le pomiculteur s'aperçoit que dans chacune des trois boîtes, il reste respectivement 29, 25 et 16 pommes. Combien y avait-il de pommes au départ dans chaque boîte ?

3. ÉVALUATION DE LA COMPÉTENCE À RÉSOUDRE DES PROBLÈMES : COMMENT L'ENSEIGNANT PEUT TIRER PARTI DE TOUT CECI ?

À des moments spécifiques de l'année, l'enseignant en charge des groupes devait évaluer les résolutions des élèves, pour voir si ceux-ci développaient leur compétence à résoudre des problèmes et si cette dernière cadrait avec les visées ministérielles. Des grilles d'évaluation, dont l'objectif était plus spécifiquement de garder des traces des productions des élèves, ont alors été élaborées pour permettre de juger de la progression des élèves. Voici l'exemple d'une grille bâtie afin d'évaluer une résolution de problèmes (cf. figure 3).

[6] Problème tiré de Mathématlon, APAME. Malheureusement, l'année n'a pu être retrouvée.

Titre ou numéro du problème : ____

Support utilisé dans la résolution du problème

	ÉNONCÉS	Oui	Non
Support **nombre**	❖ L'élève utilise seulement les nombres du problème ; il fait des calculs pour résoudre son problème.		
	❖ L'élève utilise un exemple numérique pour y voir clair dans la structure du problème.		
Support **dessin**	❖ L'élève se sert du dessin pour raisonner, il travaille sur le dessin (le dessin constitue le point de départ, un démarrage à la résolution du problème).		
	❖ L'élève se sert d'un dessin pour illustrer sa réponse ou ses données, mais il n'opère pas dessus.		
Autre support	❖ Il y a présence d'une explication en mots de la démarche venant appuyer le raisonnement.		
	❖ L'élève a recours à un autre mode de représentation : un tableau, un schéma, etc.		
Mixte	❖ L'élève a recours à de multiples représentations.		

Organisation

	Échelle		
	Peu	Moyen	Beaucoup
Les solutions de l'élève sont clairement structurées. On voit facilement son cheminement.	1	2	3
L'élève met en évidence ses étapes de résolution.	Oui		Non
L'élève met en évidence sa réponse.	Oui		Non

Argumentation

	Échelle			
	Pas du tout	Peu	Moyen	Beaucoup
Élaboration de l'argumentation	0	1	2	3
L'argumentation de l'élève est :	Vraie		Fausse	

Stratégies

L'élève emploie différentes stratégies.	Oui	Non
Validité de la stratégie (spécifier la stratégie)	Oui	Non

Figure 3. Fiche d'appréciation de la résolution d'un problème

Comme nous pouvons le constater, cette grille contient quatre parties bien distinctes : les supports à la résolution, l'organisation de la solution, l'argumentation dans la démarche et les stratégies employées. Attardons-nous plus spécifiquement à chacune des parties.

Parmi les composantes[7] de la compétence à résoudre des problèmes, les composantes « représenter la situation-problème par un modèle mathématique » et « élaborer une solution mathématique » sont rejointes par la première partie de la grille, celle des supports. Cette première partie est subdivisée en quatre catégories. L'enseignant doit alors cocher lorsqu'un certain type de support est utilisé par l'élève. Le premier type de support qui peut être utilisé pour résoudre un problème est le support « nombres ». Le support nombres a été divisé en deux : l'élève peut utiliser des nombres pour faire un calcul (les nombres servent ici à résoudre, et le problème semble avant tout associé à un calcul) ou bien utiliser une valeur numérique pour y voir clair dans la structure du problème (les nombres servent alors d'amorce à la résolution, ils permettent à l'élève de comprendre le problème, les relations entre les données). D'un cas à l'autre, le support nombres ne joue pas du tout le même rôle.

L'élève peut également avoir recours à un support « dessin ». Il peut là encore utiliser le dessin comme un moyen de résolution, de raisonnement, comme amorce servant à mieux comprendre le problème et sa structure, ou bien l'élève peut se servir du dessin uniquement pour illustrer sa réponse sans « opérer » directement sur celui-ci. Comme autre type de supports, l'élève peut recourir à une explication en mots qui vient appuyer son raisonnement, ou bien il peut avoir recours à un autre mode de représentations. On pense dans ce dernier cas à des tableaux, des schémas, etc. Finalement, pour les types de supports que nous avons ciblés, l'élève peut avoir recours à un support mixte, c'est-à-dire qu'il s'appuie sur plusieurs représentations pour amorcer et avancer dans la résolution du problème.

La deuxième partie de la grille s'attarde à l'organisation de la démarche de l'élève. Elle rejoint ici la composante de la compétence « partager l'information relative à sa solution ; structurer sa démarche pour qu'un autre puisse la comprendre ». Cette partie a été divisée selon trois critères distincts : la structure de la démarche de l'élève, la mise en évidence des étapes de résolution et la mise en évidence de la réponse donnée par l'élève. Pour le premier critère, l'enseignant peut utiliser une échelle de 1 à 3 (peu–moyen–beaucoup), selon son jugement.

La troisième partie de la grille porte sur l'argumentation dont fait preuve l'élève à l'intérieur de sa solution. Cette dimension rejoint davantage la composante « valider la solution ». D'une part, l'enseignant peut, sur une échelle de 0 à 3 (pas du tout–peu–moyen–beaucoup) juger de l'argumentation dont fait preuve l'élève. Tout ce que l'enseignant évalue dans ce critère, c'est la présence ou non de l'argumentation, puisque dans un deuxième temps, il peut juger si cette argumentation est vraie ou fausse.

[7] Dans le programme du Ministère de l'éducation du Québec, la compétence à résoudre une situation-problème est subdivisée en cinq composantes : décoder les éléments qui se prêtent à un traitement mathématique, représenter la situation-problème par un modèle mathématique, élaborer une solution mathématique, valider la solution et partager l'information relative à la solution.

Finalement, pour la dernière partie de la grille, nous nous intéressions aux stratégies présentes pour chacun des problèmes demandés. Nous souhaitions faire ressortir si l'élève emploie plusieurs stratégies pour résoudre le problème ; dans un deuxième temps, s'il identifie la stratégie employée et dans un troisième, si elle est valide. Par exemple, la résolution du problème de la balance, abordé précédemment, peut déboucher sur plusieurs stratégies qui mettent en évidence la richesse du problème, comme le démontrent les stratégies suivantes pour les questions a) et b).

Première stratégie : **Élimination**

L'élève élimine ce qui est commun à chaque côté de la balance. Il raisonne sur l'équivalence de poids qui est conservée entre les deux plateaux pour déduire le résultat. La figure ci-dessous montre la production d'un élève dont la résolution met en œuvre cette stratégie.

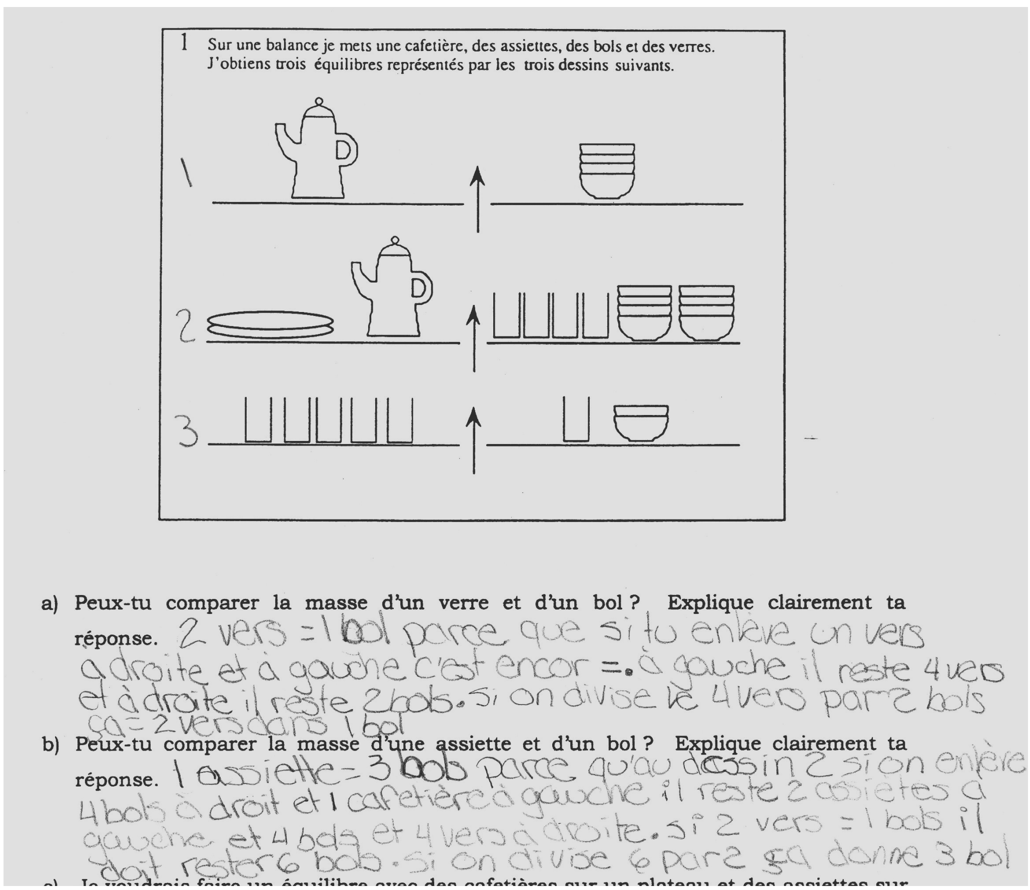


Figure 4. Stratégie d'élimination employée par un élève

Deuxième stratégie : **Comparaison**
L'élève compare les éléments présents sur chacun des plateaux pour déduire le résultat.

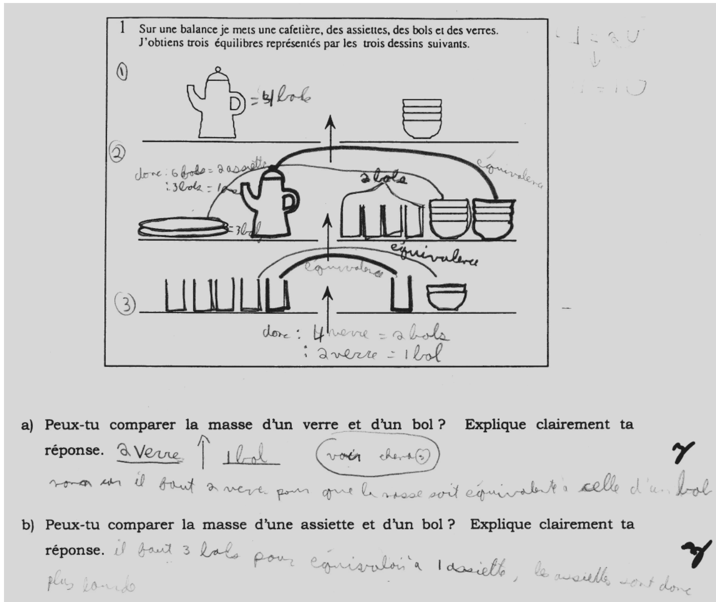


Figure 5. Stratégie de comparaison employée par un élève

Troisième stratégie : **Donner une valeur fictive aux masses**
Les élèves donnent un poids fictif pour la masse d'un objet afin de pouvoir déduire la masse de l'autre objet.

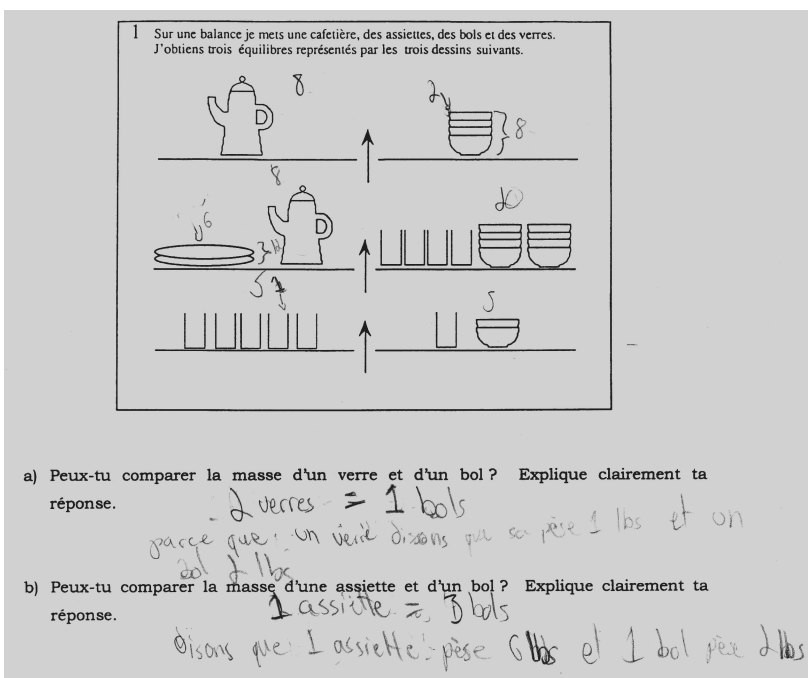


Figure 6. Stratégie consistant à donner des valeurs fictives

4. QUELQUES RÉSULTATS ISSUS DE LA RECHERCHE, SOUS L'ANGLE DES SITUATIONS EXPLOITÉES

Comme nous l'avons souligné précédemment, l'expérimentation du portfolio et l'analyse des productions des élèves, à l'aide des différents outils mis au point, faisaient l'objet d'un mémoire de maîtrise (Labrosse, 2004). Du point de vue de la recherche, plusieurs conclusions ont été mises en évidence. Sans entrer dans les détails, nous présenterons, dans ce qui va suivre, quelques-uns de ces résultats.

Dans un premier temps, l'analyse des productions d'élèves a permis de constater que certaines situations exploitées dans les formulations et les résolutions avaient plus de potentiel que d'autres. Des problèmes comme celui de la balance (cf. figure 3) favorisaient l'argumentation des élèves, par la nature des questions posées et le recours à d'autres types de représentations (support du dessin, aucun nombre n'est donné). Les élèves étaient forcés d'argumenter en mots, étant donné le type de question posée et le support proposé (la question portait moins à s'engager dans des calculs). Des problèmes de ce type motivent une justification et du même coup, permettent à l'enseignant de mieux suivre le raisonnement de l'élève.

D'autre part, comme ce problème est formulé en termes de comparaisons qualitatives, il a favorisé l'emploi d'un plus grand nombre de supports dans les résolutions des élèves. Les élèves utilisaient plus de ressources, ce qui apparaît un bon indice du développement de la compétence à résoudre des problèmes. Conséquemment, ce type de problèmes semble mobiliser un plus grand éventail de stratégies, fait intéressant compte tenu de la composante « apprécier la pertinence et l'efficacité de différentes stratégies ».

Pour faire suite à ce bref retour sur le potentiel de certaines situations exploitées, nous reprendrons les principales observations faites dans l'analyse, quant à l'évolution de la compétence à résoudre une situation-problème chez les élèves.

Dans les activités de résolutions, nous avons observé une certaine évolution des justifications des élèves : la présence d'argumentation en mots semblait augmenter au fur et à mesure que se déroulait l'expérimentation. Sous l'angle des supports utilisés, les élèves mobilisaient plus de ressources à mesure qu'ils faisaient les problèmes proposés. Toutefois, ces justifications semblaient étroitement liées aux situations proposées, au même titre que l'emploi par les élèves de supports différents.

5. EN GUISE DE CONCLUSION

Le portfolio permet de mieux voir la progression des compétences des élèves et rejoint bien une optique d'individualisation des approches pédagogiques et évaluatives. Par la multitude des situations exploitées dans le portfolio, particulièrement celles où l'élève doit résoudre des problèmes de toutes sortes, l'enseignant peut mieux percevoir les raisonnements de ses élèves. Conséquemment, plusieurs stratégies peuvent alors être confrontées et permettent des échanges enrichissants, favorisant le développement des compétences disciplinaires. Des problèmes riches comme celui de la balance permettent non seulement à l'élève de mobiliser ses savoirs mathématiques, mais l'amènent également à argumenter, à recourir à plusieurs supports, à structurer sa démarche et à être confronté à plusieurs stratégies.

Évaluer un problème mathématique est une tâche beaucoup plus complexe que la pratique enseignante nous laisse croire. C'est pourquoi diversifier les problèmes que nous soumettons à nos élèves et recourir à des grilles d'évaluation nous permet, comme praticien, de considérer la démarche entière de l'élève et ainsi prendre une distance de la simple réponse au problème.

BIBLIOGRAPHIE

BEDNARZ, N., MORAND, J.-C. et RENÉ DE COTRET, S. (1988). *Procédures des élèves et raisonnement proportionnel au secondaire.* Guide d'accompagnement de la vidéo du même titre. CIRADE.

JONNAERT, P. (2002). *Compétence et socioconstructivisme – Un cadre théorique.* Éditions De Boeck Université*,* Bruxelles.

LABROSSE, P. (2004). *L'évaluation de la compétence à résoudre des problèmes en mathématiques : une approche basée sur le portfoli*o. Mémoire de maîtrise inédit. Université du Québec à Montréal.

LANDRY, M. (1999). *Développement d'habiletés en résolution de problèmes en algèbre chez les élèves du secondaire.* Thèse de doctorat inédite. Université du Québec à Montréal.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DU QUÉBEC (1988). *Guide pédagogique – primaire. Mathématiques. Fascicule K – Résolution de problèmes – Orientation générale*. Direction des programmes, Québec.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DU QUÉBEC (2003). Programmes d'études secondaires en mathématiques.

PERRENOUD, P. (1997). Gérer la progression des apprentissages. *Éducateur-Magazine*, n°12, pp. 24-29.

philippe.labrosse@sympatico.ca

CONFÉRENCE DE CLÔTURE

Anna SIERPINSKA

Department of Mathematics and Statistics

Concordia University

« Papa veut que je raisonne… » [1],

Quelques réflexions sur la valeur du raisonnement mathématique dans la formation de futurs citoyens et professionnels

ANNA SIERPINSKA

CONCORDIA UNIVERSITY

1. INTRODUCTION

Le thème de ce colloque, « Raisonnement mathématique et formation citoyenne » et les questions soulevées dans le document de discussion suffiraient à remplir un congrès de neuf jours pour quatre mille participants. J'avais donc beaucoup de difficulté à choisir un point particulier pour ma conférence. Finalement, j'ai décidé de partager avec vous, un peu en vrac, quelques idées qui me sont venues en lisant le document de discussion.

Un point qui a surtout attiré mon attention dans le document de discussion était le suivant :

> *Les concepteurs des programmes du* Ministère de l'Éducation du Québec *considèrent pour leur part que l'enseignement de la géométrie constitue un lieu privilégié où initier l'élève aux « … exigences de rigueur, d'exactitude, de justification et de preuve » (MEQ, Math 436, p. 3). Ces exigences ne pourront aller qu'en augmentant, quand on sait que le* nouveau programme *du secondaire fera de la compétence « Déployer un raisonnement en mathématiques » l'une des trois compétences fondamentales. Dans le nouveau programme du primaire déjà en place, la compétence « Raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques » joue également un rôle central* (GDM-2005, Exposition du thème du colloque).

Je me suis demandé que pourrait devenir, dans la pratique de l'enseignement et de l'évaluation, l'initiation aux « exigences de rigueur, d'exactitude, de justification et de preuve » et l'exigence de « raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques ». Mon expérience et ma mémoire de l'enseignement des mathématiques dans la deuxième moitié du XX^{e} siècle ne me remplissent pas d'optimisme.

Faire des preuves, c'est difficile. Évaluer les preuves des étudiants, … n'est pas facile non plus. Et ce n'est pas très agréable pour l'enseignant ! Alors pour éviter un taux excessif de retards scolaires, on va construire tout un échafaudage didactique qui va réduire l'activité de preuve à des récitations, à la production de textes formatés d'avance, dont le contenu aura très peu à voir avec les raisonnements réellement conduits par les élèves. On va traiter la preuve pendant une ou deux semaines et puis on va passer à autre chose. La preuve va perdre son rôle d'explication, de moyen de comprendre, de contrôle de

[1] Cette citation vient de la chanson enfantine : « Ah, vous dirais-je maman/ ce qui cause mon tourment/ Papa veut que je raisonne/ comme une grande personne/ Moi je dis que les bonbons/ valent mieux que la raison. »

la validité des résultats, de travail de recherche mathématique. Les didacticiens feront un grand travail conceptuel et ils seront très créatifs, mais les élèves auront une preuve irréfutable que les mathématiques à l'école, ce n'est pas logique, c'est de la mémorisation, c'est des questions qui n'ont pas de sens, c'est le domaine ou la vérité est déterminée par la seule autorité de l'enseignant, et si les étudiants ne savent pas ce que l'enseignant veut qu'ils fassent, aucun raisonnement ne va les aider à trouver la bonne réponse.

Je ne suis pas contre l'enseignement qui valorise les raisonnements en mathématiques. Je suis seulement contre des programmes où les élèves ont à produire des preuves dans un langage et une forme déterminée a priori parce qu'on le leur demande ; c'est-à-dire, où la preuve est un produit du contrat didactique et non un outil de contrôle de la validité, un moyen de s'expliquer et de comprendre une théorie.

2. QUELLES POURRAIENT ÊTRE LES CONSÉQUENCES DU FAIT DE PRENDRE LE RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE COMME OBJET EXPLICITE D'ENSEIGNEMENT ?

Je vais expliquer mes craintes à ce sujet à partir d'un exemple.

Les candidats pour les études commerciales dans notre université doivent prendre des cours d'algèbre et de calcul différentiel et intégral. Pour l'intérêt de cette clientèle, on invente des problèmes comme le suivant :

> *Dans le problème suivant, vous devez montrer algébriquement comment vous êtes arrivés à votre réponse. Il ne suffit pas de donner seulement la réponse.*
>
> *Une somme de $10 000 est investie dans deux plans différents, un donnant un intérêt simple de 10% et l'autre de 7.5%. (Le risque est plus grand dans le fond à 10%). Quelle est la plus petite somme qui doit être investie à 10% pour que l'intérêt annuel soit de $850 ?*[2]

Supposons qu'un étudiant arrive à la réponse en faisant des calculs systématiques, commençant par un investissement de $ 1000, l'augmentant de 1000 et calculant à chaque fois l'intérêt total (Tableau 1). Il finit par obtenir l'intérêt total de $ 850, lorsque la répartition des fonds est 4000 + 6000. Le seul problème est de vérifier si cette somme pourrait être obtenue avec un investissement plus petit que $ 4000 dans le premier fond.

Plan 1	Plan 2	Intérêt 1 = 0.1*Plan 1	Intérêt 2 = 0.075*Plan 2	Intérêt total
1000	9000	100	675	775
2000	8000	200	600	800
3000	7000	300	525	825
4000	6000	400	450	850

Tableau 1. Solution par exploration systématique

[2] Examen final, décembre 2004, MATH 200 *Fundamental Concepts of Algebra*, Concordia University.

En observant la dernière colonne, il voit que les nombres croissent toujours par 25. Comme la dernière colonne est obtenue par multiplication par des constantes et par addition, on ne peut pas avoir de surprises entre les valeurs obtenues et il n'y a certainement pas de possibilité d'obtenir 850 dans la dernière colonne avant d'avoir 4000 dans la première.

Mais ce raisonnement ne se qualifie pas comme algébrique, donc il ne compte pas dans l'évaluation. Alors l'étudiant décide de rédiger une solution algébrique. Il pose :

$$\begin{cases} x + y = 10\,000 \\ 0.1x + 0.075y = 850. \end{cases}$$

Il résout ce système d'équations par des manipulations algébriques et obtient $x = 4000$. Sa solution ne contient aucune explication verbale ; il s'en abstient car la solution doit être « algébrique ». Par ailleurs, cette suite d'équations ne correspond pas à son raisonnement, donc il ne saurait même pas quoi écrire. Quand les corrections arrivent, l'étudiant est surpris de n'avoir pas reçu 100% des points. *La réponse est bonne, mais le raisonnement ne l'est pas*, explique l'enseignant. *Il fallait écrire* :

> Soit x la somme investie à 10 % et soit y l'intérêt total. Par les données du problème,
>
> $y = 0.1x + 0.075\,(10000 - x)$, soit
>
> $y = 0.025x + 750$, ou
>
> $x = (y - 750) / 0.025$
>
> Donc, si y est égal à 850, $x = 4000$.
>
> Comme y est une fonction croissante, pour $x > 4000$, $y > 850$.
>
> Donc l'investissement de 4000 à 10 % est le moindre qu'on doive faire pour obtenir l'intérêt total de 850.

L'étudiant essaie de convaincre l'enseignant qu'en fait, c'est comme ça qu'il a raisonné, mais il ne l'a pas écrit parce qu'il ne savait pas comment le mettre par écrit avec des x et des y. L'enseignant ne se laisse pas convaincre, parce qu'il doit mettre des notes sur la base de ce qu'il voit dans la copie, et non de ce que l'étudiant lui dit qu'il a pensé après avoir reçu la note.

3. LES RAISONNEMENTS MATHÉMATIQUES SONT-ILS UTILES POUR LES ÉTUDIANTS QUI SE DIRIGENT VERS D'AUTRES PROFESSIONS QUE LA RECHERCHE EN MATHÉMATIQUES ?

Prenons un autre exemple :
Algèbre pour les candidats aux études en psychologie ou en éducation.

Dans notre université, une des conditions à l'admission aux études en psychologie est la réussite d'un cours d'algèbre de niveau secondaire. Ceux qui ne l'ont pas pris quand ils étaient encore à l'école ou ceux qui l'ont pris il y a un certain temps suivent un cours de rattrapage, offert par notre université (MATH 200 *Fundamental concepts of algebra*). Pour réussir ce cours, il faut, entre autres, résoudre des problèmes comme le suivant :

Factoriser complètement

$6\, a^2\, x^3\, y + 10\, a^3\, x^4\, y^4 + 14\, a\, x^3\, y^5$

Les étudiants n'ont pas de moyens théoriques pour valider leur résultat. Le cours ne développe pas la théorie des polynômes au point où celui qui suit le cours peut décider si un polynôme est ou non irréductible. Donc, l'étudiant ne peut pas décider s'il a, oui ou non, factorisé le polynôme « complètement ». Autrement dit, la validité de sa réponse n'est pas sous le contrôle de son propre raisonnement, mais dépend de l'autorité de l'enseignant.

À quoi des exercices comme celui-ci peuvent-ils servir dans la formation citoyenne ? Apprendre les mathématiques sans pouvoir discuter de la validité d'un résultat en termes mathématiques avec son enseignant : cela peut produire des citoyens dociles devant l'autorité des savants mathématiciens, mais peut-être pas des citoyens critiques vis-à-vis des discours politiques utilisant des arguments quantitatifs ou soi-disant scientifiques. Mais peut-être ces exercices sont-ils utiles dans les études en psychologie et ce serait pour cela qu'on les fait faire aux étudiants ?

Les étudiants en psychologie rencontrent les mathématiques surtout dans les cours de statistiques. À quoi pourrait leur servir la compétence en manipulations algébriques qui est exigée pour leur admission à ces programmes ? Les cours de statistiques pour les étudiants en psychologie ou en sciences de l'éducation semblent ne pas capitaliser sur cette compétence. Prenons l'exemple du manuel d'Aron & Aron (2002). Ce manuel introduit la formule pour la variance par rapport à la moyenne d'une population[3] comme une sorte de représentation graphique — plutôt qu'algébrique — de la procédure du calcul de cet indice statistique.

> *We have seen that the variance is the average squared deviation from the mean. In symbols, this is how it looks :*
>
> $$SD^2 = \frac{\sum(X - M)^2}{N}$$
>
> *SD^2 is the symbol for the variance.*[…] *The symbol emphasizes that the variance is standard deviation squared. The top part of the formula is the sum of squared deviations. X is for each score and M is the mean. Thus, X – M is the score minus the mean, the deviation score. The exponent, 2, tells you to square each deviation score. Finally, the sum sign (Σ) tells you to add together all these squared deviation scores. The bottom part of the formula tells you to divide the sum of the squared deviation scores by N, the number of scores* (Aron & Aron, 2002, p. 30).

Le statut opératoire de la représentation symbolique — le fait qu'elle appartient à un *registre sémiotique permettant un traitement* (Duval, 1995) — n'est ni souligné, ni utilisé dans le manuel, même quand une occasion se présente. Une telle occasion apparaît lorsque

[3] C'est une formule pour la population entière et non pour un échantillon : cela explique qu'on ait *N* au dénominateur.

le manuel introduit une « formule de calcul » pour la même variance. L'équivalence algébrique des deux formules n'est pas démontrée (et le lecteur n'est pas encouragé à le faire), et elle n'est même pas discutée. On explique seulement le contexte historique de l'existence des formules de calcul à côté des formules de définition. Le lecteur pourrait être conduit à penser que les deux formules sont équivalentes pour des valeurs de N suffisamment grandes, puisqu'on souligne le fait que la formule de calcul est utilisée lorsque le nombre de données est grand.

> *In actual research situations, social and behavioral scientists must often figure the variance and the standard deviation for distributions with a great many scores, often involving decimals or large numbers. This can make the whole process quite time-consuming, even with a calculator. To deal with this problem, over the years researchers developed a number of shortcut formulas to simplify the figuring. A shortcut formula of this type is called a* computational formula. *The computational formula for the variance is*
>
> $$SD^2 = \frac{\sum X^2 - (\sum X)^2 / N}{N}$$
>
> *Note that ΣX^2 means that you square each score and then take the sum of these scores. However, $(\Sigma X)^2$ means that you first add up all the scores and then take the square of this sum.*
>
> *This formula is easier to use if you are computing the variance for a lot of numbers by hand because you do not have to first find the deviation score for each raw score.*
>
> *However, these days computational formulas are mainly of historical interest. They are used by researchers only when computers are not readily available to do the figuring. In fact, even many hand calculators are set up so that you need only enter the scores and press a button or two to get the variance and the standard deviation.* (Aron & Aron, 2002, pp. 31-32).

Regardons les deux formules.

$$SD^2 = \frac{\sum(X - M)^2}{N} \qquad\qquad SD^2 = \frac{\sum X^2 - (\sum X)^2 / N}{N}$$

Pour démontrer qu'elles sont équivalentes, donc qu'elles produisent un même nombre pour une même liste de données X, il faudrait les voir comme représentant des nombres et non des procédures. Ceci est le premier obstacle conceptuel à franchir et nous savons qu'il est de taille ; il est aussi très commun parmi les étudiants. Une autre difficulté pour les étudiants qui ont appris l'algèbre dans des cours donnés par des mathématiciens (et non par des statisticiens ou psychologues) est que la notation utilisée dans ces formules est différente de celle qu'ils connaissent. Ces formules ne peuvent pas être prises « à la lettre », pour ainsi dire ; elles comprennent des « figures de style mathématiques » : des métonymies *pars pro toto*, en l'occurrence. Dans les classes d'algèbre, on écrirait plutôt :

$$SD^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - M)^2}{N} \quad \text{et} \quad SD^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i^2 - (\sum_{i=1}^{N} X_i)^2 / N}{N}$$

Les formules du manuel Aron & Aron sont comme une partie (*pars*) seulement d'un « tout » (*toto*) que constituent les formules ci-dessus.

Dans les cours de statistiques enseignés par des mathématiciens, les formules n'apparaîtraient pas comme des procédures de calcul mais comme des définitions, avec des hypothèses détaillées à propos des variables en jeu. Il est probable que ces formules ne seraient données que comme une sorte d'annexe à une théorie plus générale de l'étude de la distribution des variables aléatoires (par ex. Hogg & Tanis, 2001, p. 13). Un étudiant en psychologie ayant appris les statistiques chez des mathématiciens aurait du mal à s'habituer à ce nouveau discours, qu'il verrait comme peu soigné. Pourtant, dans un contexte où tout le monde sait de quoi on parle, on peut faire de l'algèbre avec la notation comme celle du manuel d'Aron & Aron, sans traîner les indices et les bornes des sommations qui, c'est entendu, sont toujours les mêmes dans le cadre d'un même calcul. « C'est entendu » : donc, on ne se pose plus de questions. On ne questionne pas le contexte, on ne cherche pas à savoir qu'est-ce qui se passerait dans un autre contexte, comme en mathématiques. Alors on peut calculer tranquillement, sans se soucier de mettre les indices et les bornes, à condition de se rappeler que X représente une variable qui dépend de l'indice, alors que M est une constante. Ainsi, M est un facteur commun dans la somme ΣXM :

$$\Sigma(X - M)^2 /N = \Sigma(X^2 - 2XM + M^2)/N = \Sigma X^2 /N - 2M (\Sigma X)/N + N M^2/N$$
$$= \Sigma X^2 /N - 2M^2 + M^2 = \Sigma X^2 /N - M^2 = (\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2 /N)/N.$$

Questionnement de la pertinence des raisonnements mathématiques pour des professions diverses

Les recherches sur les raisonnements effectués par des praticiens des professions diverses (employés des banques, des hôpitaux) mettent en doute l'intérêt d'exiger des formes précises de raisonnement auprès des étudiants qui se dirigent vers des professions différentes de celles d'un chercheur en mathématiques.

> *For the past 15 years, studies of adults' behaviour in the workplace have had an important impact on the way we think about mathematical reasoning.* [These research works] *have all pointed towards a similar conclusion : that most adults use mathematics to make sense of situations in ways which differ quite radically from those of mathematicians.* […] *Rather than striving towards consistency and generality, problem solving at work is characterised by a pragmatic agenda and geared to solving particular problems. Occupational or professional concerns take precedence over those that are mathematical* (Noss, Hoyles & Pozzi, 2000, p. 17).

> *From a mathematical point of view, efficiency is usually associated with a general method that can then be flexibly applied to a wide variety of problems. This is clearly not the case in the workplace. Even if a number of tasks could potentially be solved with a similar approach, practitioners prefer to use different approaches for each task, partly based on the*

> *resources at hand. The crucial point is that orientations such as generalisability and abstraction away from the workplace are not part of the mathematics with which practitioners work. Thus mathematical routines are rarely, if ever, interpreted as exemplars of completely general mathematical concepts or relationships, nor are they manipulated or transformed to solve different types of problems.* […] [In some cases] *we could discern some kind of mathematical model underpinning practice, but one with distinctive workplace features. The model comprises an abstraction from the immediacy of the situation, but because of these workplace features it retains elements of the setting — hence we have called practitioner's conceptions of the mathematics they use at work, situated abstractions* (Ibid., p. 32).

Tout cela remet en question l'utilité de l'apprentissage de la preuve en mathématiques par tous les étudiants du secondaire et plus généralement, la possibilité du « transfert » des compétences mathématiques à d'autres domaines. Dans sa revue des recherches sur le « transfert », Evans écrivait :

> *Noss & Hoyles recognised a number of ways in which work practices and academic mathematics discourses are distinct ; for example, familiar representations, such as graphs, are 'read' differently : in* [banking mathematics], *graphs tend to be considered as displays of data — whereas, in* [academic mathematics] *they are read as a 'medium for expressing relationships' (1996 : 13-15). They were able to locate fruitful points of inter-relation in the learner's everyday practices, and also potential misleading links. One example is the care that is required in discussing interest calculations (using percentages) where the conceptual priority (in* [academic mathematics] *terms) of simple interest (prior to compound interest) conflicts with its relative rarity in* [banking mathematics] *practice. But a key point was found where work practices usefully overlap with academic mathematics : the idea of a function was used as a 'bridging concept' between* [banking mathematics] *and* [academic mathematics]. *And programming was used as a way of building models*… (Evans, 2000, pp. 297-298).

Un fait à retenir de cette citation est que les hiérarchies conceptuelles établies en mathématiques sont soumises à d'autres règles que dans d'autres domaines de l'activité humaine. On regarde autre chose, on se préoccupe d'autres questions que de l'organisation logique d'une théorie et de la validité et généralité des énoncés. La décontextualisation, qui est le fondement de la généralité en mathématiques, n'est pas la priorité dans les raisonnements mis en œuvre en milieu de travail.

Evans en arrive à la conclusion qu'un enseignement visant le transfert des apprentissages doit en faire un objet explicite de l'enseignement. Il faut montrer aux étudiants comment analyser, en détail, les points communs et les différences entre les mathématiques scolaires et les pratiques dans d'autres professions (Evans, 2000, pp. 299-300).

Une occasion pour suivre ces recommandations est le contexte de l'application du calcul des dérivées aux problèmes de l'économie. On dit aux étudiants, par exemple, que si $C(x)$ est une fonction représentant le coût total de la production de x unités d'un produit en une période de temps, alors $C'(x)$, appelé coût marginal, représente, en principe, le taux instantané de changement du coût au moment où la production a atteint x unités. On leur explique que, dans la pratique des économistes, $C'(x)$ est souvent interprété comme le coût de la production de la $(x + 1)^e$ unité. Le manuel introduit aussi les notions de profit $P(x)$ et de revenu R(x) comme fonctions de x, et les notions respectives de profit marginal (P'(x)) et revenu marginal (R'(x)).

> *In practice, C'(x) is frequently interpreted as the cost of manufacturing the* (x + 1)*-st unit. Although this is not exact, it is usually a good approximation. The justification for this interpretation is based on the fact that x is usually large, so* $\Delta x = 1$ *can be considered close to zero by comparison. Thus*
>
> $$C'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C(x+\Delta x)-C(x)}{\Delta x} \approx \frac{C(x+1)-C(x)}{1} = C(x+1) - C(x)$$
>
> (Anton, 1992, p. 286).

Le transfert est-il facilité par la résolution de problèmes comme le suivant[4] ?

> The total profit (in dollars) from the sale of x snowmobiles is $P(x) = 200x - 0.2\,x^2 - 3200$.
>
> (A) Find the average profit per snowmobile if 40 snowmobiles are produced.
>
> (B) Find the marginal average profit at the production level of 40 snowmobiles.
>
> (C) Interpret the marginal average profit found in (B).
>
> (D) Use the results of (A) and (B) to estimate the average profit per snowmobile if 41 snowmobiles are produced.

Les étudiants ont-ils besoin de réfléchir sur la différence entre le modèle mathématique (continu) et la réalité (discrète) pour le résoudre ? Utilisent-ils des formules et récitent-ils l'interprétation du manuel en réponse au point (C), sans se soucier du fait que 40 n'est pas une valeur bien grande et donc, que l'approximation, par le nombre 1, de l'accroissement de la variable x n'est peut-être pas bien justifiée ?

Questionnement de l'apport de l'exercice de preuves en géométrie pour la compétence plus générale en raisonnement « logique »

Il y a quelques raisons de croire que l'entraînement aux démonstrations en géométrie n'aide pas forcément à développer le « raisonnement logique ». Voici quelques statistiques, provenant d'une étude TIMSS citée par Howson (2003, p. 129). On regarde les solutions des étudiants d'à peu près 18 ans, prenant des cours avancés de mathématiques, à des problèmes de deux types : problèmes de démonstration en géométrie et problèmes en raisonnement logique. Voici des exemples de tels problèmes[5].

Problème P1 :

> Dans le triangle ABC, les hauteurs AA' et BB' se coupent au point O.
> On sait que les angles $\angle$ ABC et $\angle$ A'OB' sont supplémentaires (leur somme est égale à deux angles droits).
> Démontrer que le triangle ABC est isocèle.

[4] Final examination, MATH 209, Concordia University, 2004.

[5] Les problèmes P1 et P2 sont des exemples des types de problèmes qui auraient pu être donnés dans l'étude TIMSS. Ce ne sont pas exactement ces problèmes; Howson ne cite pas ces problèmes dans son article.

Problème P2 :

> À l'heure du goûter, à la garderie, on a donné des biscuits aux enfants. Il y avait 15 enfants. Didier a mangé 13 biscuits, et chacun des autres enfants en a mangé moins que ce nombre.
> Trouve, si possible, parmi les énoncés suivants, ceux qui s'ensuivent logiquement de l'information ci-dessus.
> A. Il reste 2 biscuits pour les autres enfants.
> B. Au moins deux enfants ont mangé chacun au moins deux biscuits.
> C. Au moins deux enfants ont mangé le même nombre de biscuits.
> D. Au moins un enfant n'a pas mangé de biscuits.

On compare les pourcentages des élèves qui ont obtenu des réponses correctes, pour la Grèce, la France et les États-unis (Tableau 2).

	% d'étudiants 18+ en maths avancées	**Problème de démonstration**	**Problème de raisonnement**
Grèce	10%	65%	33.8%
France	20%	53%	61.8%
USA	14%	< 10%	70.0%

Tableau 2. Résultats d'une étude TIMSS

> *Data from the Third International Mathematics and Science Study (TIMSS) relating to pure geometrical knowledge of 18+ specialist mathematics students in their last year of secondary school make dismal reading. For example, an open response item asking students to prove a triangle was isoceles (given angle facts relating to two of its altitudes) was answered correctly by fewer than 10% of US specialist students ; the corresponding percentages for two groups og high scoring students, from Greece and France, were 65 and 53 respectively. ('Specialist students' represented approximately 14%, 10% and 20% of the three countries age cohorts.) However, before one reads too much into these results and the students' abilities to think logically, it should be noted that the percentages of students able to identify which of four statements could be logically deduced from the fact that (to paraphrase) 21 letters had been placed in 4 pigeon holes were : US, 70.0 ; France, 61.8, and Greece, 33.8.* (Howson, 2003).

4. ENSEIGNER LA PREUVE, C'EST DIFFICILE. LES RÉSULTATS VALENT-ILS L'EFFORT ?

On peut demander aux étudiants de justifier leurs résultats, mais alors il faut s'attendre à des arguments de toutes sortes, qu'on ne pourra pas évaluer avec les mêmes critères que d'autres types de réponses. Les enseignants de mathématiques ont horreur de corriger les exercices contenant des raisonnements plus longs. Il faut établir des critères pour chaque problème séparément et ceci, seulement après avoir vu les solutions de tous les étudiants. Dans beaucoup de cas, il est difficile d'établir comment l'étudiant a raisonné, car il peut avoir eu du mal à s'exprimer, surtout si la langue d'enseignement est différente de sa langue maternelle.

Un autre problème pour les enseignants est le suivant. La preuve mathématique n'a de sens que dans un système théorique, avec les concepts introduits par des axiomes et définitions, une notation symbolique incluant des règles de manipulation, des propositions et théorèmes. Le temps donné pour une quelconque théorie étant maigre (on doit familiariser l'élève ou l'étudiant avec un grand nombre de concepts provenant de théories diverses : ce n'est plus que la géométrie, l'arithmétique et l'algèbre comme autrefois), si l'on voulait faire faire des preuves aux étudiants, on en serait resté au tout début de la théorie, avec des théorèmes pas très importants ou prégnants pour les applications. Par exemple, en algèbre linéaire, on fait grand cas de la démonstration qu'il n'y a qu'un seul zéro dans un espace vectoriel). En plus, les systèmes qui permettent de faire des preuves rigoureuses à base d'un petit nombre de règles ne peuvent être que des modèles très simplistes d'une réalité mille fois plus complexe. Ces modèles ne permettent donc d'expliquer que très peu de chose. À quoi bon les utiliser, alors ?

L'enseignement des démonstrations mathématiques est notoire pour sa difficulté. Dans une recherche faite en Belgique (Burton et Detheux-Jehin, 1998) sur un échantillon de 1063 élèves finissant leur premier degré du secondaire, seulement 14% des élèves ont atteint la « maîtrise » dans la démonstration d'une propriété géométrique (obtenu une note de plus de 80%). Le taux de maîtrise n'était plus bas que sur deux autres compétences : résolution de problèmes (10%) et manipulations algébriques (9%). Les élèves maîtrisaient le mieux les problèmes ou il s'agissait « d'associer une équation à une représentation concrète » (taux de maîtrise = 69%) et « comparer la valeur de l'inconnue dans deux équations » (taux de maîtrise = 66%). Il est donc même plus difficile d'enseigner la résolution des problèmes que l'art de la démonstration, mais dans la résolution de problèmes, au moins, les élèves ont plus de moyens de contrôle sur la validité de leurs solutions. Et la valeur éducative pour tous les élèves de la résolution de problèmes est plus évidente que celle des démonstrations mathématiques plus ou moins formelles.

La recherche mentionnée a été conduite pour diagnostiquer les causes d'un taux élevé de retard scolaire en Communauté française de Belgique relativement aux autres pays européens, et cela après une réforme de l'enseignement fondamental et secondaire qui voulait promouvoir l'idée d'une « école de réussite ». Les auteurs disent :

> [L'idée de l'école de réussite] *devait se traduire* [en mathématiques] *par la préoccupation déclarée de dispenser à tous les élèves les bagages mathématiques nécessaires au développement de citoyens critiques et responsables. Cependant, à l'opposé des objectifs définis par les pouvoirs publics, les indices quantitatifs dévoilant une tout autre réalité du terrain éducatif se sont accumulés au fil du temps. Il existerait donc des écarts importants entre les objectifs visés et réalisés* (Burton et Deteux-Jehin, 1998).

Parmi les facteurs responsables de tels résultats, les auteurs mentionnent la « culture de l'échec », qui induit les enseignants à instaurer des pratiques d'évaluation normative, de varier leurs exigences et les élever au-delà des objectifs formulés dans les programmes en fonction de la maîtrise maximale atteinte dans la classe. Ces pratiques, disent-ils, constituent « une puissante contrainte à toute tentative de la démocratisation de l'école. […] Le système éducatif belge est marqué par une véritable culture de l'échec ».

Ces auteurs mentionnent aussi « les imprécisions des consignes d'évaluation » comme cause possible des résultats médiocres. Ces imprécisions, je crois, ne peuvent pas êtres éliminées en ce qui concerne l'évaluation des preuves produites par les élèves : ceci n'est pas possible *par principe*. Il y aura donc toujours une grande liberté et donc variabilité dans l'évaluation parmi les différents enseignants et parmi les évaluations de différents étudiants par un même enseignant.

> *Mathematical 'rigorists' believe that it is posssible, by representing a mathematical proof in the language of first order logic, to establish beyond any doubt the validity of a mathematical statement. But they fail to make clear that such derivations are purely hypothetical activities (except for 'toy' problems that might be played with as exercises in a course in logic). The actual situation is this. On the one hand, we have real mathematics, with proofs which are established by 'consensus of the qualified'*[6]*. A real proof is not checkable by a machine, or even by any mathematicians not privy to the gestalt, the mode of thought of the particular field of mathematics in which the proof is located. Even to the 'qualified reader', there are normally differences of opinion as to whether a real proof (i.e. one that is actually spoken or written down) is complete or correct. These doubts are resolved by communication and explanation, never by transcribing the proof into first-order predicate calculus.* (Davis, Hersh & Marchisotto, 1995, p. 392).

5. APPRENDRE LA PREUVE, C'EST DIFFICILE. QUELS EN SONT LES COÛTS DIDACTIQUES ET SOCIAUX ?

Faire des preuves est difficile parce que c'est un acte créatif dans un domaine très particulier de pensée

La preuve de l'énoncé portant sur une condition suffisante pour qu'un triangle soit isocèle (voir le problème P1, précédant le *Tableau 2*) peut se réduire, finalement, à un petit calcul formel (Démonstration et Figure 1, ci-dessous).

Démonstration.

Par hypothèse, $\angle$A'OB' = 180 – (a+b) (1)

Par le théorème de l'angle extérieur dans un triangle, $\angle$ A'OB' = 90 + a (2)

(1) et (2) impliquent que 2a = 90 – b, ce qui donne 90 – a = a + b (3)

Par la somme des angles d'un triangle, $\angle$ ACB = $\angle$ B'CB = 90 – a (4)

Comme a + b = $\angle$ ABC, par (3) et (4), $\angle$ ABC = $\angle$ ACB

et le triangle ABC est isocèle, C.Q.F.D.

[6] Ainsi, c'est l'enseignant qui décide si la preuve est valide ou non, privant l'étudiant du contrôle sur les résultats de son activité de preuve : l'étudiant est, par définition, « non qualifié ». L'étudiant est non-qualifié puisqu'il n'est pas encore tout à fait initié aux rites de la culture mathématique. Il n'a donc pas l'autorité requise pour dire que c'est lui qui a raison et l'enseignant qui a tort.

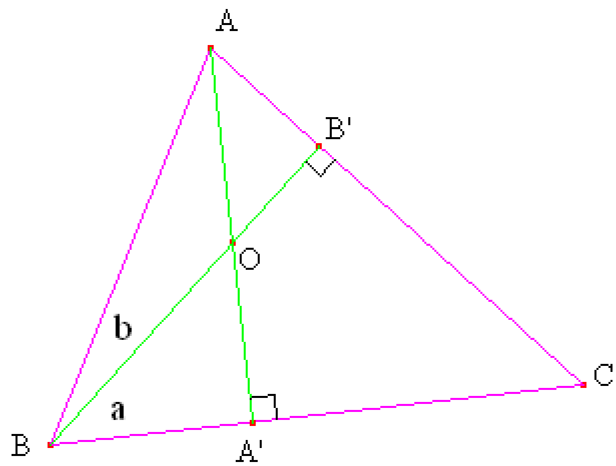


Figure 1. Figure pour le problème du triangle isocèle

Mais il ne suffit pas de savoir calculer pour trouver la preuve. Il faut encore voir des relations entre les éléments de la figure et il faut savoir choisir, parmi celles-ci, des relations utiles pour le but envisagé. La preuve est toujours un acte créatif.

> [In] *the figure certain lines… seem to be extraneous to a minimal figure drawn as an expression of the theorem itself.* […] *The extraneous lines which in high school are often called 'contruction lines', complicate the figure, but form an essential part of the deductive process. They reorganize the figure into subfigures and the reasoning takes place precisely at this level. Now, how does one know where to draw these lines so as to reason with them ? It would seem that these lines are accidental or fortuitous. In a sense this is true and constitutes the genius or the trick of the thing. Finding the lines is part of finding the proof, and this may be no easy matter. With experience come insight and skill at finding proper construction lines. One person may be more skillful at it than another. There is no graranteed way to arrive at a proof. This sad truth is equally rankling to schoolchildren and to skillful mathematician* (Davis, Hersh & Marchisotto, 1995, p. 166).

Solutions didactiques visant à réduire la difficulté de la preuve

Pour réduire les difficultés de l'élaboration des preuves en géométrie, on a créé des logiciels de géométrie dynamique comme Cabri et SketchPad, par exemple. On voulait également centrer les raisonnements scolaires en géométrie plus sur des explorations et des conjectures, sur la vérification des conjectures, et moins sur la récitation des preuves et leur rédaction dans un langage rigide. C'est alors que les années 1990 ont vu la prolifération de problèmes comme le suivant :

> Construis un segment BC et une droite d parallèle à la droite BC, différente de BC. Prends un point A sur d. Construis le triangle ABC. Construis les hauteurs BB' et CC' de ce triangle. Ces hauteurs se coupent en un point O. (a) Bouge le point A sur d et observe le point O. Vois-tu quelque chose d'intéressant ? Pose des conjectures et essaie de les vérifier. (b) Bouge maintenant la droite d (en la conservant parallèle à BC). Peux-tu expliquer ce qui se passe ?

On espérait que les logiciels permettraient à un nombre plus grand d'élèves de découvrir les relations importantes dans la figure et donc, d'obtenir l'idée principale de la preuve, sans pour cela avoir du génie ou du talent à « voir dans sa tête ». On espérait que si seulement les élèves savaient ce qu'il faut démontrer dans le problème ci-dessus, ils produiraient alors sans grande difficulté des solutions comme la suivante :

Solution possible au problème d'exploration

On observe que le lieu du point O par rapport au point A variant sur la droite d parallèle à BC a l'air d'une parabole. On le vérifie à l'aide des moyens de géométrie analytique.

On pose : $A(\mathrm{t}, \mathrm{a})$; $B(-\mathrm{b}, 0)$; $C(\mathrm{b}, 0)$, où $\mathrm{b} > 0$.

BB' : $\mathrm{y} = (\mathrm{b} - \mathrm{t})/\mathrm{a}\ \mathrm{x} + \mathrm{b}\ (\mathrm{b} - \mathrm{t})/\mathrm{a}$

CC' : $\mathrm{y} = -(\mathrm{b} + \mathrm{t})/\mathrm{a}\ \mathrm{x} + \mathrm{b}\ (\mathrm{b} + \mathrm{t})/\mathrm{a}$

Intersection O de BB' et CC' : $(\mathrm{t}, (-\mathrm{t}^2 + \mathrm{b}^2)/\mathrm{a})$

Plus la distance a de la droite d à la droite BC est grande, plus la parabole est « aplatie » et plus son sommet est proche de l'origine des axes, car le coefficient du carré de la variable indépendante diminue, et il en est de même du coefficient libre.

Les recherches ont montré, cependant, qu'il est très difficile d'obtenir des élèves des démonstrations analytiques après qu'ils aient trouvé la réponse d'une manière empirique à l'aide de la machine. On obtenait facilement l'activité de conjecture, mais pas l'activité de vérification des conjectures. Il est clair qu'il faut construire des problèmes très spéciaux pour forcer des démarches de raisonnement théorique et non basé sur l'évidence visuelle (un travail de recherche dans cette direction est fait en France autour de Colette Laborde).

Les démonstrations sont des textes qui ont peu à voir avec les raisonnements utilisés pour s'expliquer un fait ou valider un résultat

Les raisonnements mathématiques rendent les étudiants plus en contrôle de ce qu'il font en mathématiques et dans d'autres domaines. Mais je ne suis pas sûre si une production de textes appelés « preuves mathématiques » soumis à l'évaluation par une note scolaire peut jouer le même rôle. Dans ce cas, les étudiants se demandent surtout « quel genre de texte l'enseignant veut que je produise », car nous ne pouvons pas leur donner des moyens de contrôle sur la validité mathématique de leurs preuves ! Qu'une preuve soit correcte ou non, il n'y a pas de critères simples et communicables à des débutants. Cela revient donc toujours à l'enseignant de décider si une preuve est bonne ou non. Et ainsi, l'étudiant reste dépendant de l'enseignant. Il y a, bien sûr, quelques méthodes ou techniques de preuve (comme l'induction, la preuve par contraposition…) mais la plupart du temps, une preuve demande de « voir » un aspect d'une certaine manière pour avoir « l'idée de la preuve », et cela ne s'obtient pas en suivant une procédure. Il faut du talent, ou beaucoup d'expérience difficile à acquérir (voir par ex. Castela, 2004).

Voici le témoignage d'une de nos étudiantes, admise au programme des mathématiques à l'université mais exclue du programme d'études commerciales. Elle est revenue aux études après neuf ans de travail comme comptable dans une entreprise. On ne lui a pas permis de continuer d'occuper ce poste parce qu'elle n'avait pas de diplôme universitaire de comptable. Elle a voulu entrer au programme d'études commerciales, mais ses notes en mathématiques étaient trop basses pour y être admise. Elle a par contre été admise en mathématiques et statistiques. Le premier cours obligatoire dans ce programme est un cours intitulé « Introduction to Mathematical Thinking », où les étudiants apprennent quelques rudiments de logique et de méthodes de preuve, dans le contexte des nombres et des fonctions. Comme comptable, cette étudiante a dû résoudre pas mal de problèmes à l'aide de certains raisonnements, mais cette expérience ne lui a apparemment servi à rien dans le cours. Elle s'y sentait complètement perdue. Dans une entrevue (*Research on frustration in preparatory math courses* ; Interview with J. T., mature student, 2003), elle nous a dit :

J : I'm doing the course on Mathematical Thinking. I never expected to do arguments in Math and I'm saying I'm lost in proving. How do you prove ? And I want to learn how to prove, but I just don't get it. Why this is this and why this is that, you know it's so hard to get. Exam's coming up and you haven't quite clicked at it. And the way how the teachers put the question is **very hard to figure out what they want**.

A : I think the classical question that they ask in these courses is 'why even plus even equals even'.

J : Okay, odd and an even. You get an odd. So that means one of them must be an odd, so you have to argue why one of them is an odd. So, that I understand, you know, but it's when they put, prove the square root of something is irrational, and then you have to, you know, it's complicated…

A : Yeah, yeah, yeah.

J : For me, **I just want to understand what I'm doing**. I expected some help, just never found it.

A : So that's where you're frustrated ?

J : Yeah.

La réussite en mathématiques est une mesure socialement reconnue de l'aptitude académique ; l'échec mène à l'exclusion

Certains sociologues craignent que les exigences vis-à-vis de l'apprentissage des mathématiques ne fassent croître la délinquance scolaire ou les dépressions nerveuses. C'est le cas de Bourdieu (1994, pp. 49-50), qui écrit :

> *Il faudrait aussi examiner le lien entre la nouvelle délinquance scolaire… et la logique de la compétition forcenée qui domine l'institution scolaire et surtout l'effet de destin que le système scolaire exerce sur les adolescents : c'est souvent avec une très grande brutalité psychologique que l'institution scolaire impose ses jugements totaux et ses verdicts sans appel qui rangent tous les élèves dans une hiérarchie unique des formes d'excellence — dominée aujourd'hui par une discipline — les mathématiques. Les exclus se trouvent condamnés au nom d'un critère collectivement reconnu et approuvé, donc psychologiquement indiscutable et indiscuté, celui de l'intelligence : aussi n'ont-ils souvent pas d'autre recours, pour restaurer une identité menacée, que les ruptures brutales avec l'ordre scolaire et l'ordre social (on a observé, en France, que c'est dans la révolte contre*

> *l'école que se façonnent et se soudent nombre de bandes de délinquants) ou, comme c'est aussi le cas, la crise psychique, voire la maladie mentale ou le suicide*.

Il est probable que l'exigence de l'apprentissage de la démonstration mathématique, davantage que l'apprentissage de l'argumentation, favorise les enfants des familles qui valorisent les textes écrits et les connaissances théoriques et risque de mettre en échec les enfants vivants dans des familles préférant la culture visuelle et orale de la télévision et des films. Les premiers ont moins de mal à obtenir des diplômes universitaires et accéder aux postes dominants dans la société, postes déjà détenus par leurs parents. Et ainsi se défait l'idéal démocratique de l'accès au pouvoir sur la base du mérite, et non de l'hérédité génétique et économique.

> *Le système scolaire… maintient l'ordre préexistant, c'est-à-dire l'écart entre les élèves dotés de quantités inégales de capital culturel. Plus précisément, par toute une série d'opérations de sélection, il sépare les détenteurs de capital culturel hérité de ceux qui en sont dépourvus. Les différences d'aptitude étant inséparables de différences sociales selon le capital hérité, il tend à maintenir les différences sociales préexistantes.* […] *En instaurant une coupure entre les élèves des grandes écoles et les élèves des facultés, l'institution scolaire institue des frontières sociales analogues à celles qui séparaient la grande noblesse de la petite noblesse, et celle-ci des simples roturiers. Cette séparation est marquée, d'abord dans les conditions de vie même, avec l'opposition entre la vie recluse de l'internat et la vie libre de l'étudiant, ensuite dans le contenu et surtout dans l'organisation du travail de préparation aux concours : d'un côté, un encadrement très strict et des formes d'apprentissage très scolaires, et surtout une atmosphère d'urgence et de compétition qui impose la docilité et qui présente une analogie évidente avec le monde de l'entreprise; de l'autre, la 'vie étudiante' qui, proche de la tradition de la vie de bohème, comporte beaucoup moins de disciplines et de contraintes, même dans le temps consacré au travail ; elle se marque enfin dans et par le concours lui-même et par la coupure rituelle, véritable frontière magique, qu'il institue, en séparant le dernier reçu du premier collé par une différence de nature, marquée par le droit de porter un nom, un titre* (Bourdieu, 1994, p. 41).

Même les étudiants très doués en mathématiques n'aiment pas forcément faire des preuves

Un étudiant en actuariat — avec un talent spécifique pour les mathématiques (16 ans et déjà à l'université) — que nous avons questionné sur son expérience d'apprentissage de l'algèbre linéaire, nous a dit qu'il avait du mal à « voir » de quoi il s'agissait dans la théorie. Il luttait contre son incompréhension en étudiant les démonstrations de tous les théorèmes introduits dans le cours, même celles que l'enseignant omettait en classe. Il en avait besoin, disait-il, pour mieux « visualiser » les liens entre les concepts et comprendre les raisons derrière les théorèmes.

> *How do I read proofs ? I start by reading the theorem. What they are claiming. And try to see in my mind, try to see a picture of what they are talking about, like this part is that part, so what is this and what is that, and try to see a coonnection, or looking at properties, and trying to find a way to get from one to the other, or…* [I make] *a lot of notes, and drawings* […]. *It helps because the vision is like the faculty of learning* (Sierpinska, Nnadozie & Oktaç, 2002, p. 89).

L'étudiant ressentait le besoin de vérifier ou de « voir » la validité du savoir qu'il apprenait par lui-même ; la seule autorité de l'enseignant ne suffisait pas.

> *I would think it is better for me to discover the truth myself. Like, instructors aren't there to just tell you what's true or false. If it* [were] *true… then where would they start… to try to see these concepts if they were all lied on… There must be someone who had discovered it. And when you discover something, what's true or what's false, then it stays in your mind* […]. *Probably, you should rely on your teachers to teach you some things, and based on those you can, you can find the truth about other things. Like, they show you some building blocks, and you use the building blocks to build other things, but they're not there to show you everything* (Ibid., p. 89).

Mais ce même étudiant n'aimait pas faire des « exercices de démonstration ». Il était sûr qu'il allait appliquer les mathématiques dans sa profession future, mais il ne se préparait pas à devenir mathématicien-chercheur et l'apprentissage de la rédaction des démonstrations ne l'intéressait pas.

> *I know* [the proof exercises] *are important, but I hate them because they are a big hassle. You really have to work a lot of time on it. It's not a specific example you have to do. When you have so many things to do, and you have a proof, you can't say, it's going to take me 5 to 15 minutes, because for that problem it's probably going to take you much more. Or, you'll have to seek some help. But,… for* [a computational exercise]*, they're all similar. So you just have to follow the technique and practice on it* (Ibid., p. 89).

6. REMARQUES FINALES

6.1. Qu'est-ce qui caractérise les raisonnements mathématiques parmi d'autres raisonnements théoriques ?

Les raisonnements en mathématiques sont théoriques, c'est-à-dire que leur but est la production de théories ou de systèmes conceptuels. Cela a des conséquences, comme le caractère

- réflexif (les techniques ou procédures restent toujours ouvertes au questionnement) ;
- systémique (les objets de la pensée sont des systèmes de relations ; le sens des termes est stabilisé par des définitions ; la pensée est concernée par les questions de validité, de méthodologie ; les constatations sont toujours hypothétiques…) ;
- analytique (la relation entre la pensée et son objet est médiatisée par des systèmes de signes)

de ces raisonnements (Sierpinska, 2005).

Mais le caractère théorique des raisonnements n'est pas spécifique aux mathématiques. Il y a des raisonnements théoriques dans les sciences physiques, en chimie, en biologie, en économie, en psychologie, en linguistique, dans les sciences de l'éducation, mais aussi dans la littérature et la philosophie. Mais en littérature et en philosophie, par exemple, le raisonnement est toujours sous le contrôle du sens. Dans les sciences de l'éducation et partout où l'on utilise les statistiques, ainsi que dans les sciences (physique, chimie, astronomie, etc.) où l'on construit des modèles mathématiques, il y a une partie du raisonnement qui est sous le contrôle d'un calcul formel (numérique, algébrique, logique).

En mathématiques aussi, une partie du raisonnement est sous le contrôle d'un calcul formel, mais la différence avec les autres sciences est qu'en mathématiques, la possibilité d'un tel contrôle est une préoccupation majeure. On cherche à construire des systèmes de concepts et des notations qui rendraient possible de confier au calcul formel des espaces les plus vastes du raisonnement, assurant un contrôle automatique, sûr, indépendant de l'état d'esprit du penseur. On développe aussi des moyens de s'assurer que les calculs font bien ce qu'on veut qu'ils fassent, dans les conditions les moins contraignantes possible.

L'activité du calcul formel, en elle-même, ne constitue pas les mathématiques. Le calcul formel est un produit du travail du mathématicien, et c'est aussi son outil de raisonnement. Mais quelqu'un qui fait des additions ou résout une équation différentielle par une méthode connue ne fait pas encore (ou ne fait plus), au moment même, des mathématiques.

6.2. Si telle est la nature des raisonnements mathématiques, quelle est leur pertinence pour la formation de futurs citoyens ?

Les questions qui sous-tendent les raisonnements mathématiques sont-elles accessibles et intéressantes pour les élèves des écoles primaires et secondaires, ainsi que pour les étudiants ne se dirigeant pas vers les mathématiques ? L'entraînement à faire de tels raisonnements a-t-il quelque valeur pour l'éducation des futurs citoyens et professionnels, autres que les mathématiciens ?

Les éducateurs et les mathématiciens surestiment le pouvoir et l'applicabilité universelle des raisonnements mathématiques et des modèles généraux. Il y a peu d'applications, en dehors des mathématiques, des raisonnements dans des systèmes de concepts explicites et bien définis. Les praticiens de diverses professions ont beaucoup de contrôle sur ce qu'ils font, mais les preuves mathématiques ne sont pas, normalement, les moyens de ce contrôle. Les problèmes en milieu de travail sont la plupart du temps trop complexes et trop urgents pour être résolus à l'aide des seuls raisonnements mathématiques.

Je crois donc que, dans l'enseignement général des mathématiques, il faut se restreindre aux raisonnements dont une partie est sous le contrôle d'un calcul formel, mais ne pas exiger de tous les élèves qu'ils reviennent ensuite sur leurs raisonnements pour les écrire dans un code spécifié et pour se poser à leur sujet toutes sortes de questions purement mathématiques.

6.3. L'entraînement scolaire aux raisonnements mathématiques va-t-il produire des employés plus autonomes dans leur travail ?

On dit qu'aujourd'hui, l'industrie n'a plus besoin de travailleurs « à la chaîne », qui ne font que suivre des instructions et font les mêmes gestes jour après jour pendant des années, mais de décideurs, d'organisateurs du travail. On souhaite donc que les diplômés de nos écoles soient à même de prendre des décisions d'une façon autonome, informée de toutes sortes de faits et de relations entre les variables du système avec lequel ils travaillent. Ils ne vont pas apprendre cela dans des cours de preuve en mathématique. Ces cours peuvent rendre les étudiants encore plus dépendants des enseignants. Ils ne vont pas apprendre tout ça, non plus, dans des cours où ils ne font que manipuler des inscriptions formelles ou substituer des nombres aux variables dans des formules toutes faites pour calculer les valeurs demandées. Quel est donc le conseil qu'on puisse donner ?

Les élèves doivent surtout « savoir ce qu'ils font » en mathématiques et en sciences

L'école a le devoir de préparer les jeunes à devenir des membres actifs de la société et pas seulement de passifs mangeurs de bonbons. Pour cela, il faut que les élèves aient l'expérience et le goût de raisonner, c'est-à-dire de se poser des questions pour savoir pourquoi et comment les choses sont comme elles sont. Mais ce but ne sera pas nécessairement atteint au moyen de l'exercice des démonstrations géométriques de type : *démontrer que, dans telles et telles conditions, tel triangle est isocèle*. Par contre, il y a un grand potentiel dans des questions comme celles que Freudenthal a proposées, il y a bien longtemps :

> *Why does a piece of paper fold along a straight line ?*
>
> *Why does a rolled piece of paper become rigid ?*
>
> *Why does a tied paper ribbon show a regular pentagon ?*
>
> *How do shadows originate ?*
>
> *What is the intersection of a plane and a sphere or two spheres ?*
>
> *Why can the radius of a circle be transferred six times around its periphery ?*
>
> *How come a beautiful star arises by this construction ?*
>
> (Freudenthal, 1973, p. 404).

L'étudiante adulte, ancienne comptable, interviewée plus haut, se plaignait que, bien qu'elle ait été capable de démontrer quelques propriétés des nombres, elle avait du mal à « savoir ce qu'elle faisait ». Elle avait du mal à savoir, dans le cas de certains problèmes concrets, ce qu'elle cherchait, pourquoi, et si ce qu'elle avait trouvé était bien ce qu'elle cherchait. Mais elle manquait aussi d'une perspective plus large sur ce qu'elle faisait, en général, dans ce cours ; quel était le but et le sens de toutes ces activités de preuve. L'idée que « savoir ce qu'on fait », dans la pratique de la construction du savoir scientifique, c'est chercher des régularités ou des « lois », et pas seulement s'assurer que tel ou tel énoncé particulier est vrai pour toutes les valeurs d'une certaine variable, lui échappait. En focalisant l'attention des étudiants sur des vérités « locales » et des méthodes précises pour les démontrer, on risque de perdre de vue que, dans une perspective plus large de la pratique des sciences, l'erreur locale n'a pas tellement d'importance. Comme disait si bien le physicien et philosophe Jan Bronowski,

> *The future is, as it were, always a little out of focus, and everything that we foresee in it is seen embedded in a small area of uncertainty. It is the human situation and the situation of science. We do not contemplate the facts without error, but because we know what we are doing, we may act upon them without fear* [paraphrase de Clifford, un physicien du 19e siècle]. *'Because we know what we are doing' : this is the crux of science. We are not merely observing and predicting facts ; and that is why any philosophy which builds science only from facts is mistaken. We know, that is we find laws ; and every human action uses these*

laws, and at the same time tests them and feels towards new laws. It is not the form of these laws which matters. The laws of science, like those which we use in our private behaviour, remain helpful and truthful whether they contain words like 'always', or only 'more often than not'. What matters is the recognition of the law in the facts. It is the law we verify : the pattern, the order, the structure of events. This is why science is so full of symbolism of numbers and geometry, which are the most familiar expressions of structural relations (Bronowski, 1960/1951, p. 134).

Devons nous déléguer la prise de conscience de ce principe de l'avancement de la science aux cours de « pensée critique », si populaires parmi les étudiants (voir par ex. Boisvert, 1999 ; Breton et Gauthier, 2000) ? Dans ces cours, cette perspective globale n'est transmise que comme une philosophie, un savoir descriptif. Ce n'est que dans les cours de mathématiques et de sciences que les étudiants ont la chance de pétrir, avec leur propres mains, la pâte du savoir scientifique en toute conscience de ce qu'ils font.

Comment donc aider les élèves à comprendre ce qu'ils font en mathématiques de façon à ce que ça leur soit utile dans leurs professions futures ? On dit que la notion de fonction est peut-être privilégiée, dans sa capacité à créer des ponts entre les mathématiques scolaires et les mathématiques d'autres professions. Mais ce n'est pas en démontrant rigoureusement qu'une relation donnée est une fonction bijective que ce pont pourra être créé. Les exercices algébriques sur les limites et dérivées n'assureront pas ce pont non plus. Il faut des approches beaucoup plus subtiles. On en trouve quelques suggestions dans les articles du numéro spécial de la revue *Educational Studies in Mathematics* (Vol. 57.3, 2004 ; *On forms of knowing : The role of bodily activity and tools in mathematical learning*). On y montre, entre autres, que l'interaction avec des outils, l'activité physique, prioperception, le contrôle de son corps afin d'obtenir un mouvement avec certaines caractéristiques mathématiques (par exemple suivant une courbe représentée graphiquement) rendent les élèves plus maîtres de l'étude des variation de fonctions, que les démonstrations formelles basées sur les définitions et théorèmes portant sur des fonctions et des dérivées. Il y a sans doute d'autres approches à découvrir ou redécouvrir.

BIBLIOGRAPHIE

ANTON, H. (1992). *Calculus with Analytic Geometry, Brief Edition*. 4e édition. John Wiley & Sons, New York.

ARON, A. A. & ARON, E. N. (2002). *Statistics for the Behavioral and Social Sciences. A brief course*. 2e édition. Prentice-Hall Canada, Toronto.

BOISVERT, J. (1999). *La formation de la pensée critique*. ERPI (Éditions du Renouveau Pédagogique), Ville Saint-Laurent, Québec.

BOURDIEU, P. (1994). *Raisons pratiques*. Éditions du Seuil, Paris.

BRETON, P. et GAUTHIER, G. (2000). *Histoire des théories de l'argumentation*. Éditions La Découverte, Paris.

BRONOWSKI, J. (1960/1951). *The Common Sense of Science*. Penguin Books, Londres.

BURTON, R. et DETHEUX-JEHIN, M. (1998). Évaluation des finalités éducatives de l'enseignement des mathématiques en communauté française de Belgique. In *Actes de la 50e Rencontre de la CIEAEM* (2 au 7 août 1998), pp. 74-79. Neuchâtel, Suisse.

CASTELA, C. (2004). Institutions influencing mathematics students' private work. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 57.1, pp. 33-63.

DAVIS, P. J., HERSH, R. & MARCHISOTTO, E. A. (1995). *The Mathematical Experience.* Birkhäuser, Boston.

DUVAL, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Régistres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Éditions Peter Lang, Berne, Suisse.

EVANS, J. (2000). Adult mathematics and everyday life : Building bridges and facilitating learning 'transfer'. In *Perspectives on Adults Learning Mathematics*, pp. 289-305. D. Coben, éd. Kluwer, Dordrecht, Pays-Bas.

FREUDENTHAL, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Reidel, Dordrecht, PaysBas.

HOGG, R. V. & TANIS, E. A. (2001). *Probability and Statistical Inference*. 6e édition. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey.

HOWSON, G. (2003). Geometry : 1950-70. In *One Hundred Years of L'Enseignement Mathématique, Moments of Mathematics Education in the Twentieth Century*, pp. 113-132. D. Coray, F. Furinghetti, H. Gispert, B. R. Hodgson & G. Schubring, éds. L'Enseignement Mathématique, Monographie n°39,.

NOSS, R. & HOYLES, C. (1996). The visibility of meanings : Modelling the mathematics of banking. *International Journal of Computers for Mathematics Learning*, n°1.1, pp. 3-31.

NOSS, R., HOYLES, C. & POZZI, S. (2000). Working knowledge : mathematics in use. In *Education for Mathematics in the Workplace*, pp. 17-35. A. Bessot & J. Ridgway, éds. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Pays-Bas.

SIERPINSKA, A. (2005). On practical and theoretical thinking and other false dichotomies in mathematics education. In *Activity and Sign – Grounding Mathematics Education*, pp. 117-135. M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard & F. Seeger, éds. Springer, New York.

SIERPINSKA, A., NNADOZIE, S. & OKTAÇ, A. (2002). *A Study of Relationships between Theoretical Thinking and High Achievement in Linear Algebra*. Concordia University Report, accessible à l'adresse internet :
http://alcor.concordia.ca/~sierp/downloadpapers.html